ج . بوليا

البحث عن الحل

الأسلوب الرياضي من زاوية جديدة

ترجمة احمد سليم سعيدان

مراجعة الدكتور وصفي حجاب



دار مكتبة الحياة - بيروت



البحث عن الحل

الأسلوب الرياضي من زاوية جديدة

الطبعة الثانية

نشر بالاشتراك مع

مؤسسة فرنكلين للطباعة والنشر

بيروت - نيويورك

١٩٦٥



البحث عن الحل

الاسلوب الرياضي من زاوية جديدة

تأليف : ج . بوليا

ترجمة : احمد سليم سعيدان

مراجعة : الدكتور وصفي حجاب

دار مكتبة الحياة - بيروت

المسهمون في هذا الكتاب

ج . بوليا

عالم رياضي مشهور ، واحد اساتذة علم الرياضيات في جامّعة ستانفورد في الولايات المتحدة . وكتابه هذا « البحث عن الحل » اسهام عظيم في موضوع ايجاد الحلول للمسائل الرياضية . وهدف المؤلف الرئيسي في هذا الكتاب هو ان يهدي الى طريقة جديدة يمكن تطبيقها على مسائل فنية اخرى عدا عن المسائل الهندسية . ويحاول الاستاذ بوليا ان يبعد عن منهج التفكير الانقطاعات التي تشوشه ، ويرشد القارىء الى منهج واضح منتج للتفكير .

احمد سليم سعيدان

من مواليد صفد بفلسطين ، يحمل شهادة بكالوريوس علوم في الرياضيات من الجامعة الاميركية في بيروت ومن جامعة لندن. عمل في التعليم في الكلية العربية ، والكلية الرشيدية في القدس ، وفي معاهد التعليم العالي في السودان .

بالاضافة الى مقالاته الكثيرة ، فقد وضع كتاباً بعنوان : « الفكر الانساني في طفولته » (القاهرة ١٩٥٥) .

الدكتور وصفي حجاب

من مواليد فلسطين ، تلقى علومه في الكلية العربية في القدس ، وفي الجامعة الاميركية في بيروت حيث حصل على شهادة بكالوريوس علوم ، ودرس الفلسفة في جامعة كمبردج ببريطانية . ثم ذهب الى جامعة فلوريدا في الولايات المتحدة حيث حصل على شهادات : Ph. D., M. S. E., M. S. . وله العديد من المقالات العلمية .

مقدمة المترجم

هذا الكتاب الذي اتيح لنا ان نقدمه الى المكتبة العربية جولة رائعة في معركة فكرية ما تزال قائمة منذ عهد بعيد . وهي معركة تكاد تنجلي عن انقلاب واسع في عالم التربية ، فمن حق القراء العرب عامة ومن يعنون بالتربية خاصة ان يطلعوا عليها وان يكون لهم رأي في احداثها .

والمعركة حول العلوم الرياضية ، قيمتها وغاياتها ومقرراتها الدراسية ووسائل تدريسها . فالرياضيات كغيرها من الموضوعات الثقافية ، لها منذ القدم مؤيدون يميلون اليها ويعلون من شأنها ، ومعارضون يكرهونها ويستقلون قيمتها في الحياة. ولكنها ما تزال منذ القدم اكثر هذه الموضوعات نصيباً من الكره وتجنياً من الكارهين ، يمقتها الناس وهم طلبة صغار ثم يشبون ويشب معهم هذا المقت حتى ليتندرون عليها وعلى مدرسيها وحتى ليجعلون الفشل في الرياضيات احياناً ضرباً من المباهاة — باطل لا نلمسه عند عامة الناس فقط بل عند ذوي المواهب وذوي النفوذ ، وهو باطل لا ندري كم يحدث من أثر في نفس شاب يسمعه وهو في سن المحاكاة والتقليد .

فاذا كان يمكن التغاضي عن الكره والتجني في الماضي باعتبارهما ضرباً من الدعابة ، فقد كانت الرياضيات آنئذ فروعاً قليلة تعد على اصابع اليدين وتنشر ظلالها على موضوعين او ثلاثة من الموضوعات العلمية والعملية التي تهم الاختصاصيين وقلما يسبر غورها الرأي العام او تتوغل في اعماق فكره ومجرى حياته .

ولكن من قبل مطلع هذا القرن طفقت الرياضيات تنمو وتتسع وتزيد شعباً وفروعاً حتى صار لها اليوم اكثر من ثمانين فرعاً ضخماً كل منها له قيمته وله

شأنه ، وكل منها يلح على مقررات الدراسة كيما يكون له فيها نصيب. وكما اتسعت رقعة الرياضيات وامتدت آفاقها في الداخل، فقد اتسعت وامتدت في الخارج حتى نشرت لواءها على موضوعات كثيرة غيرها، بل نقشت طابعها على الفكر الانساني كله ،حتى صارت علوم كثيرة تنتهج المنهج الرياضي في مقاييسها واحكامها ،بل تجعل أسمى غاياتها ان تكون رياضية في روحها واسلوبها ورياضية في دقتها ورصانتها ، فصار لا بد لدارس هذه العلوم من اساس رياضي واطلاع رياضي وذوق رياضي .

وبتقدم الفكر الرياضي تقدمت الفكرة الفلسفية العالمية وتطورت وجهة النظر تجاه الكون والمحسوسات والمتخيلات ،وغدا الفكر الرياضي قطباً اساسياً في الفكر العالمي الحديث ، حتى صار كل من يطمح الى ان يكون ذا شأن في اي ناحية من نواحي الانتاج الفكري العالمي يجد ألا مندوحة له من اساس رياضي . حتى الادب العالمي المعاصر صارت الرياضيات تغزو ثغوره وتوغل في مجالاته ،بل قل صار هو بحاجة الى سند منها يستند عليه وغذاء منها يغتذي به ، حتى الشعر باعتباره اسمى الفنون خيالاً واوسعها آفاقاً غدا يلهث وراء الرياضيات كيما يمتد الى خيالها خياله .

وفي النصف الاول من هذا القرن نشبت حربان كبيرتان جندت لهما الدول كل قواها وامكاناتها وعقولها من اجل النصر ، وكان سباق لم يعرف له مثيل ، سباق حياة وموت فمن يصل الى السلاح الفتاك قبل غيره فهو الغالب . ولم يكن ميدان المعركة ساحات القتال وحدها ، بل هي نشبت ايضاً في معامل العلماء وعلى اوراق الرياضيين ، وكان النصر الحاسم ،ولا سيما في الحرب الكبرى الثانية ، مديناً للسبق العلمي والسبق الرياضي . وهذا يفسر ظاهرة لاحظها رجال التربية في العالم اجمع فقد عقب الحرب الكبرى الاولى حركة لدى الدول المتحاربة لإعادة النظر في البرامج التعليمية ، اما في الحرب الكبرى الثانية فقد جاءت هذه الحركة في ابان المعركة ورنت اصداؤها في مجلس العموم البريطاني وفي الكونجرس الاميركي بين قصف المدافع ودوي القنابل .

اذن فلم يعد العلم عامة والرياضيات خاصة هواية يحسن أن تنالها ،ولا يضيرك

أن تحرم منها ، بل صار أداة قوية في معركة تنازع البقاء وبقاء الأصلح ، واذن فلم يعد يحتمل التغاضي عن كره الرياضيات واعتباره دعابة بريئة فقد صار كرهاً لروح العلم كله ، اذا اتخذ شكلاً جماعياً عاماً فهو نذير تقهقر في مؤخرة ركب يغذ السير .

وهكذا لم يبق مناص من رفع شأن الرياضيات في البرامج التثقيفية واعطائها قسماً أوفر من الاهتمام .

وفي اعقاب الحرب الكبرى الاولى برز السؤال : ما السبب في هذا الكره الذي تتعرض له الرياضيات ؟ وارتفعت الاصابع كلها تشير الى سبب واحد هو أن اساليب تدريسها عقيمة سواء في حجرة الدراسة او في كتب التدريس . وفي ابان الحرب الكبرى الثانية برز السؤال بعينه مرة اخرى وبرز الجواب نفسه ايضاً .

ففي مطلع هذا القرن كانت المقررات الدراسية في الرياضيات قد اتخذت شكلاً تقليدياً متحجراً غير قابل للتعديل والتطوير ، لا يساير النهضة العلمية ولا آفاق الفكر الآخذة بالاتساع . وكان هذا الشكل التقليدي ينطوي على فلسفة تعترف بالرياضيات اعترافاً تقليدياً كوسيلة فعالة لتدريب الذهن وكموضوع ذي فائدة عملية ، ولكنها لا تنطوي على اختيار او تمييز ، فأي مادة رياضية تؤدي الغرض . أما اسلوب التدريس فكان يجري بشكل يتغاضى عن شخصية الطالب وميوله ولا يتطلب اي تعاون منه مع المدرس كعنصر فعال في تسيير دفة الدرس ، فلا اهتماماته يؤبه لها ، ولا استقلاله الفكري وأصالته يعتنى بها .

وقد كان من العمليات المألوفة اعطاء الطالب الصغير عددين من ١٥ منزلة للضرب أو كسوراً متسلسلة بالغة التعقيد للاختزال ، فان اخطأ فجزاؤه الضرب . هذا في المراحل الأولية ، اما في المرحلة الجامعية فقد يترنم الاستاذ مع طلابه كما تترنم ببيت الشعر الجميل والاغنية الجميلة ، ولكن ترنمهم بقوانين الهندسة الكروية والاحداثيات الثلاثية وغيرها من العلاقات الرياضية المعقدة .

فلا عجب ان تكره الاجيال الماضية العلوم الرياضية وتمقتها ثم تتحامل عليها جادة وهازلة ، فهي في معرض الهزل تصور استاذ الرياضيات شخصاً شرود الذهن غريب الاطوار ، وتعيد للذاكرة حديث تشريع روماني قديم كان يحرم ممارسة الرياضيات على ملأ من الناس لأنه موضوع حقير . وقد تروي للناس ايضاً كلمة للقديس أوغسطين قال فيها : ان على المسيحي الصالح ان يحذر الرياضيين والعرافين فقد تعاهد هؤلاء وهؤلاء مع الشيطان على حبس الروح في دياجير الظلام وتقييد النفس في قيود جهنم .

وهم في معرض الجد يتساءلون : ما الرياضيات ؟ اليست مجرد مجموعة من عمليات قد تفيد المهندس والفيزيائي والاقتصادي ، ولكنها رغم ذلك تطابق وصف شوبنهاور الفيلسوف الفذ اذ رآها أحط الاعمال الذهنية بدليل ان الآلة تستطيع ان تعملها فلا تخطىء .

والرياضيون لا يأبهون كثيراً لهذا التحامل عليهم ولا يسوؤهم الاستشهاد بالتشريع الروماني و كلمة القديس اوغسطين ، او هم لا يعيرونه كبير التفات لأن رياضياتهم نفسها لا تأبه بحجة كل ما يسندها استشهاد بكلام قديم كائناً من كان الشخص الذي يستشهد بقوله ، ثم انه اذا ارتبطت في اذهان المسيحيين ، في فترة من حياة المسيحية الاولى ، أعمال الوثنيين والمنجمين والرياضيين بعضها ببعض ارتباطاً أدى الى مثل التشريع المشار اليه والكلمة السابقة لرجل من رجال الدين الممتازين ، فليس الذنب ذنب الرياضيات بدليل ان الرياضيات صمدت ونمت و كبرت في حين ان شريكتيها في أذهانهم ، الوثنية والتنجيم ، قد ذهبتا الى غير رجعة .

ولكن يسوء الرياضيين حقاً ويثيرهم جهل الناس الشائع بطبيعة الرياضيات وتعريفهم اياها بأنها مجرد مجموعة من العمليات تعملها الآلة . فهم يرون ان من الجهل اعتبار الرياضيات مجرد عمليات في حين انها ابرز عنصر ثقافي في الحضارة العالمية الحديثة ، وانها عدا فوائدها العملية المهنية الظاهرة قد حددت ووجهت

الفكر الفلسفي في شتى المجـالات وقد هدمت أو أيدت نظريات شتى في الدين والاقتصاد والسياسة وامتد اثرهـا الى الفن في مضمار الرسم والموسيقى والمعمار والادب ، وفوق ذلك فهي بلا منازع ام المنطق الرؤوم وهي التي اعطت خـير الحلول لكثير من المسائل الشائكة عن طبيعة الانسان والكون ، وهي اقوى مواد الفكر فقد زحفت الى مناطق كانت تحتلها العقيدة الملقنة او العرف السائـد . فان تكن مسائل الساعة اقتصادية او سياسية فينبغي ألا ننسى ان المضمار الذي فيه نجد أقوى دليل على مقدرة الانسان على تذليـل الصعوبات والخروج منها سليماً اقوى مما كان هو حقل الرياضيات الذي يملأ النفس ثقة وأملاً بالفوز .

وان يكن العصر عصر الذرة والفضـاء فلنذكر ان الرياضيات هي اقوى ممهد لهذا العصر قبل ان يوجد وأقوى سند له وباعث على نجاحه واستتبابه بعد أن وجد .

فالرياضيات ليست في نظر من يفهمونها الفهم الصحيح مجرد عمليات ، بـل ان العمليات هي اقل ما في الرياضيات شأناً . انها كمزج الالوان من اللوحـة الفنية ، او كرصف الكلام من الشعر الجميل ، او كالهيكل العظمي من الحسناء ذات اللحم والدم والروح والنفس وجمـال الخلق والخلق . فكما يشوه صورة الحسناء عرضها كهيكل عظمي فكذلك يشوه صورة الرياضيات عرضهـا كمجموعة عمليات .

وما الرياضيات حقاً ؟ ربما كان سؤالك ما الادب ؟ او ما التاريخ ؟ او حتى ما الفلسفة ؟ اسهل جواباً او ادعى لرضى السائل والمجيب من قولك ما الرياضيات؟ ولكنه سؤال سئل واجاب عنه الرياضيون اجابات تتفاوت طولاً وعمقاً وتتباين وضوحاً وغموضاً . وليست غايتنا في هذه المقدمـة بيانها كلها ولكن غايتنا تلخيص الخطوط العريضة للجواب :

فأبرز خصائص الرياضيات انها طريقة للبحث فنية منطقيـة وانها حقل للتفكير الاصيل يعتمد كما يعتمد الادب على قوة البديهة وسعة الخيال والملاحظة ،

وهي ايضاً رغم بنيانها المنطقي الرصين تنشد الجمال وتتمتع بقدر كبير منه .

فهي طريقة للبحث منطقية تقوم على فنيـة التفكير والاستنتاج المبني على بديهيات قليلة ومبادىء ثابتة مثبتة ، وهي بديهيات يقبلها العقل ولا ينقضها اي اعتبار في اي زمان او مكان ، ومبادىء تنحـــدر من هذه البديهيات بتفكير منطقي رصين . وعلى هذه البديهيات والمبادىء يقوم البيان الرياضي قوياً متيناً بل اقوى وامتن ما عرف الانسان في عالم الفكر ، وهو بنيان ابدي ازلي ما صمد العقل وصمد الفكر ، لا تعرف سبيلاً اليه زوابع ولا اعاصير . وفي صدد هذا البنيان العظيم القائم على هذا القدر القليل من مبادىء وبديهيات شبهوا الرياضي قديماً بالعاشق : تسلم له بشيء قليل فلا يلبث ان يستنتج منه نتيجة لا تملك الا ان تسلم بها له فهو من ثم يتبعها بنتيجة اكبر واكبر وانت لا تملك الا التسليم . هكذا يأتي الرياضي باكثر الكثير من اقل القليل . وهذا تشبيه لا غضاضة فيـه الا انه من وجهة نظر العاشق والمعشوق .

والرياضيات ، اذ تبنى على منطق رصين وبرهان قاطع يسلم به الفكر ولا يملك له انكاراً ، هي اروع حقل للتفكير الاصيل فيه يستدعي المرء كل ملكاته الفكرية وكل قواه الذهنية ، وهو في سبيل اقامة البرهان ، اي مرحلة الخلق او الانشاء يستدعي قواه البديهية كلها وقوة تخيله كلها ونفاذ بصيرتـه كلها ، حتى لتعد الموهبة الرياضية الحقة موهبة في قوة البديهة وسعة الخيـــال . فالرياضي المبتكر كالشاعر المبتكر والفنان المبتكر ، ولكنه يمتاز عنهما في ان ما يبتكره خالد خلود الفكر لايزعزعه تأرجح الذوق ولا تقلب الاوضاع . تبدأ الرياضيات استقرائية تعتمد على الملاحظة والذوق والخيال كما يعتمـد الادب والفن ، فاذا هي تمت واكتملت بدت استنتاجية منطقية رصينة قائمة كالطود راسخة كالجبال.

وهي بين هذا وذاك ، بين الاستنتاج المنطقي الرصين والاستقراء البديهي التخيلي تبحث في الجمال وتبحث عن الكمال وتقـدر الجمال ، فالجمال دافع من دوافع الرياضيين وحاد من حداتهم ، وتقديره مقياس من مقاييسهم . وفي هذا

الصدد يصف الرياضيات بيرتراند راسل ، شيخ الفلاسفة المعاصرين ، بأن فيها جمالاً رائعاً يخلب الالباب ، ولكنه جمال هادىء رزين جليل لا يستثير دوافعنا الدنيا ونقاط ضعفنا ، هو جمال صاف نقي خلو من تعقيدات الرسم والموسيقى وخداع المساحيق ، وهو في جلاله وصفائه قد وصل الى اسمى ما يمكن ان يصل اليه الفن من كمال ، لا ينافسه في ذلك سوى الشعر العالمي في اعلى مراتبه .

فالرياضيات كعلم سيدة العلوم كلها وخادمتها ، وهي كفن اسمى الفنون واجلها واصفاها فليس عجيباً ان تكون الرياضيات موضوعاً للدراسة في كليات العلوم وكليات الآداب على السواء .

وكما يطل الشاعر والفنان على الناس من برج عاجي كأنه يطل من عالمه الخاص فكذلك يطل الرياضي . ولكن الرياضي متهم في انه يعيش في غير عالم الناس . وهذا اتهام ينطوي على جهل بطبيعة الرياضيات التي تميزها عن سائر العلوم والفنون ؛ فهي انما تنبت جذورها التاريخية ومسالكها الكبرى في تربة المجتمع وتنجم عن حاجات ملحة في عالم التجارة والاقتصاد والملاحة والتقويم والهندسة والدفاع عن الوطن وترفيه الحياة ووسائل المعيشة ، بل ان موضوع الاحتمالات الذي غدا اليوم اداة ضرورية لعلوم ودراسات شتى انما كان مبدأ نشوئه مشكلة في القمار . ولكن طبيعة الرياضيات الخاصة تمتاز في أنها تسد الحاجة الاجتماعية ثم تتخذ سبيلها علواً واستقلالاً وتعالياً وتجرداً فكرياً . وهي كلما زادت قيمتها كمرجع الخير في شتى العلوم والميادين زادت تجرداً وتعميما واستقلالاً في نموها وتطورها ، كشجرة باسقة اصلها في الارض وفرعها في السماء .

تلك هي بعض خصائص الرياضيات ، ان يبدُ فيها مبالغة عند من لا يعلم او تهويل ، فان في كل مسألة رياضية ذات شأن دليلاً على صحتها .

ولكن الرياضيات ، رغم ذلك او من اجل ذلك ، ما تزال تقابل من طلابها بالمقت والخوف . وفي هذا يقول المربون ان طريقة عرضها في حجرات الدرس وكتب الدراسة ينبغي تغييرها تغييراً جوهرياً . ومن قديم خامر الناس الشك

في اساليب تدريسها وفي مقرراتها ، ولعل اشهر ما قيل في هذا الصدد كلمة لديكارت ذكر فيها انه حينما عمد الى دراسة الرياضيات تناول كل الكتب المشهورة في عصره مبتدئاً بكتب الحساب والهندسة اذ قيل له انها هي الأسهل وهي المدخل الى ما عداها ؛ ولكنه لم يستسغ ما قرأ . ذلك انه رأى الاشكال الهندسية تطلعه على حقائق كثيرة وتستنتج له نتائج عدة ولكنها لم توضح له الدوافع الخفية وراء خطواتها المتتابعة فكان موقفه منها سلبياً ، يفهم النتائج وبراهينها المنطقية ولا يفهم كيف تم اكتشافها او كيف يتاح له ان يكتشف مثيلات لها لو ترك وحده ، لذلك فلم يستغرب كره الناس ، حتى ذوي المواهب منهم ، للرياضيات واعتبارهم اياها موضوعات تافهة فارغة او صعبة مستعصية . ثم تذكر كيف أن رواد الفلسفة الاوائل كانوا لا يقبلون في مدارسهم الا من أوتي حظاً من المعرفة الرياضية فخامره الشك بأن ما كانوا يعنون به كان ضرباً من الرياضيات غير الذي عرفه ورآه .

وديكارت الذي قال كلمته هذه في معرض انتقاد كتب الرياضيات عاش في القرن السابع عشر . ولم يكن اول من هاجموا اساليب عرض الحقائق الرياضية ولا آخرهم . ولكن كلماته وكلمات كثيرين غيره كانت تصطدم بصخرة عاتية من التقاليد والاعتبارات المتحجرة ، ولم تجد صدى فعالاً الا في القرن العشرين ، حينما بدأت حملة جدية لتطوير الاساليب التي يدرس بها الموضوع واختيار مواد الدراسة اختياراً تربوياً . وكان من جراء هذه الحملة او كان صفوة نتائجها تعديل مقررات الدراسة واساليبها بالشكل الذي يصف خطوطه العريضة تقرير وضعته سنة ١٩١٩ لجنة من رابطة مدرسي الرياضيات في بريطانية فكان ذلك اول تقرير شامل عن تدريس الموضوع في المدارس الابتدائية والثانوية . وقد نقح التقرير وطبع سنة ١٩٢٨ . وبفضل هذا التقرير ، او بفضل الفهم العميق للدوافع التي أدت الى وضعه وتلمس السبل لتطوير تدريس الرياضيات تطويراً يتلاءم مع اتساع موضوعها وتزايد الخبرة التربوية اعترى اسلوب تدريسها بعض التعديل واعترف بحق المربين في اختيار مواد الدراسة حسب الحاجة والبيئة .

وكان هذا التقرير في بريطانية (وامثاله في سواها) نقطـــة انطلاق نحو تعديل شامل . ولكن هذا التعديل مضى بطيئاً حتى اننا ما زلنـا الى اليوم في مرحلة انتقال من المقررات التقليدية والاسلوب التقليدي الى مقررات قابلة للتغيير والتعديل حسب الحاجة واسلوب يعترف بكل المحصول من خبرة في التربية وعلم النفس . والدلائل تشير اننا قادمون على مرحلة تطوير شامل سريع ، بل ان هذه المرحلة قد بدأت في الولايات المتحدة الاميركية فعلاً .

وتبع سنة ١٩٢٨ التي ظهر فيها التقرير البريطاني المنقح احداث شتى في عالم التدريس وكان من هذه الاحداث ان وضع ل . هوجين سنة ١٩٣٦ كتـــاب « الرياضيات للملايين » وهو كتاب للقارىء الغربي العادي تعرض فيه المبادىء الرياضية من حيث علاقتها بالحياة العامة ، فلقي الكتاب رواجاً رائعاً وترجم الى شتى اللغات وبيعت منه ملايين النسخ ، وكان هذا دليلاً على ان الرياضيات اذا احسن عرضها امكن ان تصير قراءة ومطالعة وغذاء فكرياً ،شأنها في ذلك شأن التاريخ والموضوعات الفلسفية المبسطة . واذا فات واضعي الكتب المدرسية ان يستفيدوا من هذه الظاهرة فانه لم يفت رجال الصحافة الغربية ذلك فقد خصصوا في اركان من صحفهم مسائل ذهنية كمسائل الشطرنج والكلمات المتقاطعـة فكانت سبباً في مزيد من انتشار صحفهم واقبال الناس على قراءتها .

ثم قامت الحرب الكبرى الثانية وقامت معها الحاجـة الى ضرب من التعليم الجماعي السريع لا سيما لجنود الملاحة الجوية . وقد نجح هـذا التعليم نجاحاً كان دليلاً جديداً على ان تقريب الهدف وتوضيح الدوافع يزيدان الموضوع تشويقاً ويزيدان التعليم نجاحاً .

ومع الحرب الكبرى الثانية زاد عدد المعامل العلمية الواسعة التي تحتاج الى مئات وآلاف من العلماء والدارسين يتابعون بحوثهم بشكل جماعي تعاوني فكان لا بد من بحث اجدى الطرق لتخريج هذا العدد من المتعلمين ، وبدا آنئذ ان الطريقة التقليدية لا تفي بهذه الحاجة والا مناص اذن من تعديل الطريقة اسلوباً ومقررات .

ومع هذا وذاك تناولت عـدة صحف موضوع تدريس الرياضيات وعرضت مشكلاته على الرأي العام .

قد لا نعدو الصواب اذا قلنا ان بريطانية كانت بعد الحرب الكبرى الاولى اسبق الدول الكبرى الغربية الى تعديل اساليب التعليم ، اما في الحرب الكبرى الثانية فقد احرزت الولايات المتحدة قصب السبق اذ توالت فيها الكتب الرياضية الحديثة تحمل في طياتها ثورة عظيمة وتجديداً واسعاً يستهدف فيما يستهدف امرين هامين اوحت بهما الخبرة الطويلة : همـا تقريب الهدف وعرض الموضوع بشكل يربطه بحاجات الحياة اليومية . وان نظرة في اسماء بعض الكتب تبين كيف تم تقريب الهدف، فثمة كتب الرياضيات للنجارين، والرياضيات للبنائين، والرياضيات للكهربائيين .. الخ . بالاضافة الى الرياضيات العامة التي يفرض انها تفي بحاجات الدراسة الثانوية وتهيىء للدراسة الجامعية . وكل كتاب من هذه الكتب ينطوي على فهم عميق لحاجات المجموعة التي عمل من اجلها ، فالنجار يتعلم من الرياضيات ما هو ذو صلة بمهنته ، وهذا يتفق مع ما يتعلمه الكهربائي في اشياء ويختلف معه في اشياء ، ولكن الرياضيات في جوهرها هي هي ، الطريقة الفنية المنطقيـــة ، والاستنتاج الرصين والتفكير الاصيل .

ومع هذا كله ظهر الكتاب الذي نقدمه الى القارىء العربي . وهـو صفوة عميقة للموضوع ومشكلاته وخبرة طويـلة متصلة في تدريس الرياضيات في شتى المراحل وضعه مؤلفه الاستاذ ج. بوليا سنة ١٩٤٤ ثم اعيد طبعه بعد ذلك مرات عدة . والطبعة التي نترجمها هي الطبعة الثامنة وقد ظهرت سنة ١٩٥٧ منقحـة تحوي اضافات هامة .

وفي سنة ١٩٥٧ ايضاً ظهر لأول مرة بشكل « رسمي » مكتوب صدى هذه الحركة في انجلترة في تقرير وضعته جمعية مدرسي الرياضيات فـاذا هو يتفق في روحه واهدافه مع هذا الكتاب. واذن فمن حق المؤلف علينا ان نؤكد للقارىء انما نضعه بين يديه ، بالاضافة الى ما فيه من اصالة وسبق لم يبق مجرد «اجتهاد»

فردي بل هو رأي يجد سنداً كبيراً من دوائر كثيرة مسؤولة .

وتقرير الجمعية البريطانية نشر في كتاب ضخم يتناول موضوعـــات التعليم الرياضية المختلفة بتفصيل كبير ولكنه ينطوي في جوهره على مبادىء قليلة محددة نوجزها للقارىء بما يلي :

فهو يشير الى الحاجة الى تعديل المقررات الرياضية ووضع مقررات مرنـة قابلة للتعديل غير قابلة للتحجر ، تلائم ما جرى من تطور منـــذ سنة ١٩٢٨ عندما وضع التقرير الاول المنقح .

ثم يشير الى أن الرياضيات قد اتسعت في الآونة الاخيرة وانضمت اليهـــا موضوعات وطرق على جانب كبير من الاهميـة مثل نظرية الاحتمالات والجبر الحديث ، وهذه الموضوعات والطرق تهم الرياضي والفيزيائي والاحصائي و كثيرين غيرهم فلا بد اذن من ان تتخذ لها مكاناً في المقررات الجامعية ، وهذا يقتضي ان تدخل في موضوعات الدراسة الرياضية ضرباً من الاختيار وضرباً من التكثيف يزحزح موضوعات عن مستواها الجامعي التقليدي ، كحساب التفاضل والتكامل ، وينقلهـــا الى مستوى الدراسة الثانوية . وفي ذكرنا لحساب التفاضل والتكامل بالذات اشارة تاريخية ، فقد كان هذا الموضوع في ايام نيوتن ولينتز يحتل المرتبة العليا في المعرفة الرياضية وهاهو اليوم ينحدر الى اولى درجات التخصص . فان سأل سائل ما الموضوع الذي يحتل الآن مكانــه في اعلى درجات السلم الرياضي يتعذر علينا الجواب ، ذلك ان موضوعات كثيرة هي اليوم في مرحـلة الخلق والتبلور ثم ان المحصول العلمي الرياضي قد اتسع الى حـــد تضيق حياة الفرد الواحد عن الالمام به .

اذن فالتقرير يوحي بوضع مقررات رياضية مبنية على الاختيار والتكثيف . ثم هو يتجه نحو ما ينبغي من تعديل في اسلوب عرضها فيذكرنا بان الرياضيات تبدو حتى للطالب الجامعي المتخصص موضوعاً مغرقاً في التجرد ، له بعض الصلة بعلوم اخرى من الفصيلة الرياضية ، ولكن له طرقاً خاصة ولغة خاصة ، حتى ليبدو و كأنه انحدر الينا من عالم لا تربطه بنا رابطة . فاذا ذكرنا ان صفة التجرد

هذه قد ازدادت قوة تبعاً للدراسات التي قام بها كل من وايتهد وراسل ، بان لنا ماذا يكون الحال لو انعكس اثر هذه الدراسات على طريقة عرض الرياضيات في الكتب المدرسية وحجرات التدريس . ولكن الرياضيات اذ توغل في التجرد كالشجرة تذهب جذورها في الارض وتذهب فروعها في السماء ، فهي تنبت في أرض من ارضنا وتترعرع حسب الحاجة الاجتماعية والحياة الاجتماعية ، فخير الطرق لتدريسها تدريساً ناجحاً هي الطريقة التي تظهر فيها علاقة الرياضيات بالمجتمع ، فلتزدد الرياضيات في أعاليها تجرداً وسمواً ولكن ينبغي ان نزداد الحاحاً على ربطها في حجرات الدرس وكتبه بحياتنا العامة واهدافنا الحضارية .

وكما ازدادت الرياضيات تجرداً فقد ازدادت براهينها رصانة وطرقها دقة ، وهذا ما يطبع اثره البارز في مراحل الدراسات العليا . فهل ينبغي ان ينعكس ذلك على كل اساليب تدريسها بدون تحفظ ؟ يذكرنا التقرير في الاجابة عن ذلك بكلمات تكاد تكون منقولة من كتاب الاستاذ بوليا ان الرياضيات مهما بدت استنتاجية برهانية يقينية منطقية رصينة ، فهي في مرحلة الخلق والتكوين ، كالعلوم الطبيعية ، تقديرية ظنية استقرائية تعتمد على البداهة والملاحظة والخيال والتجربة والتحسس والتخمين ، حتى ليبدو ان الرياضي الموهوب ليس هو الذي يعرف البرهان الرصين وانما هو الذي وهب من قوة البداهة وسعة الخيال ما يستطيع به ان يبتكر هذا البرهان ، فلنحتفظ اذن للرصانة والدقة بمكانتها في اعلى مراحل التخصص ، ولنجعل هدفنا قبل ذلك ترويض ملكة البداهة وملكة الخيال عند الطلاب والا زادت الرياضيات تعقيداً في نظر الدارسين وزادت التواءً ، وزاد تبعاً لذلك كرههم لها وخوفهم منها وفشلهم فيها .

ثم يذكرنا التقرير بان علماء النفس المعاصرين ما زالوا منذ نصف قرن يقومون بدراسات مستحصفة ويجرون تجارب متباينة فينبغي ان نفيد من النتائج التي حصلوا عليها والتوصيات التي يلحون علينا بها ، وان اهم هذه النتائج والتوصيات ان نهتم بالطالب قبل المادة ، وان نذكر ان الطالب قلما يفهم الحل ان هو لم يتبين

الدافع اليه والطريقة التي تم بها اكتشافه . ثم أليست غايتنا ان ينجح الطالب ؟ فلنتذكر اذن ان ليس ادعى الى النجاح من النجاح، فلنجعل همنا ان نخلق بالطالب ثقة بنفسه وطمأنينة الى موضوعه بتصويره له بصورة متصلة بالحياة وعرضه عليه بشكل يتناسب مع مقدار فهمه ومع اهتماماته واتجاهاته، والا كان فهمه للرياضيات غثاً وتقديره لها فجاً وفشلنا في تعليمه مؤكداً .

هذا مجمل الحركة الفكرية التي جاء كتاب الاستاذ ج . بوليا جولة رائعة فيها ، فيحسن ان يتناوله القارىء اذن على هذا الاساس .

والمؤلف يخاطب في كتابه كل قارىء ، ولكنه وضع نصب عينيه بطبيعة الحال القارىء الاميركي فهو لا يحدثه عن المقرارت كيف يجب ان تكون ، ذلك ان مشكلة المقررات قد حلت في اميركا الى حد ما، بأن جعلت كتب الرياضيات سلاسل متباينة تختلف باختلاف الطلاب الذين يدرسونها وتنصب في كل جزء منها على نقطة محددة وهدف واضح قريب، فرياضيات البنائين مثلاً ، تعرض ما يهم البنائين فعلاً وما يرتبط بالمهنة التي اختاروها لأنفسهم ؛ وهي تبني ما تعرضه بشكل ظاهر للعين على هذه المهنة وتربطه بها ، وفي ذلك تتجنب كل تجريد للموضوع وبعد به عن الحياة العامة .

فالمؤلف لا يتناول المقررات ، ولكن يتناول طريقة التدريس . والنقطة الاساسية التي يحوم حولها بحثه كله : ان الحل ، اي حل ، لا يجوز ان يملى على الطالب املاء بل ينبغي ان يستدرج للحصول عليه استدراجاً حتى يراه وهو يشعر كأنه هو الذي اكتشفه . ومن اجل استدراج الطالب الى فكرة الحل يلقي المدرس اسئلة وتوجيهات بسيطة صريحة طبيعية ، مما يسنح للطالب نفسه اذا هو فكر في الحل تفكيراً جاداً ، الغاية منها حصر تفكيره في موضوع المسألة وحصر انتباهه فيها وابقاء ذهنه في شغل ونشاط . ولما كان من أهم الغايات التي يجب ان يتوخاها كل مدرس (وكل مؤلف) اظهار الدافع الى كل خطوة

من خطوات الحل والسبب الذي من اجله نخطوها وجعل هذا الدافع يبدو طبيعياً تلقائياً فيلزم اذن ان نتجنب ذكر اي سؤال او توجيه خاص لا يعرف الطالب كيف دار في خلدنا . فاذا كان حل المسألة يعتمد على استعمال نظرية فيثاغورس مثلاً ، فالاتجاه الصحيح ان نتروى قليلاً لعل النظرية ترد على خاطر الطالب تلقائياً . فان هي لم ترد فلنسأله : هل تعرف نظرية تفيدك ؟ ولنفسح له مجالاً للتنقيب في النظريات التي يعرفها ، فان لم يتذكر النظرية التي تنفعه فليتسع صدرنا لالقاء اسئلة اخرى تساعده على تذكرها ، ولكن لا يجوز في حال من الاحوال ان نختصر الطريق فنلقي بمثل السؤال : ما قولك فيٍنظرية فيثاغورس ؟

ورغم ان المسائل التي نود حلها ونقابلها في دراستنا وفي حياتنا كثيرة لا حد لها ، فان الاسئلة والتوجيهات التي نتدرج او نستدرج الى حلها عن طريق حصر الذهن والانتباه وتشغيل الفكر والذاكرة — هذه الاسئلة والتوجيهات قليلةالعدد محدودة ، لا سيما اذا راعينا انها ينبغي ان تكون عامة تصلح في شتى الحالات وطبيعية مما يدور في كل ذهن وليس فيها سمة تخصيص . وقد جمع المؤلف ما يراه انسب هذه الاسئلة والتوجيهات وصنفها وبوبها حسب مراحل الحل الاربع : فهم المسألة ، ورسم الخطة وتنفيذها ، ثم مراجعة الحل . وافرد لها صدر المكان من كتابه ثم جعل بحثه كله يدور حولها ، حول قيمتها وفائدتها والعمليات الذهنية التي تستثيرها ومواضع استعمالها . وهو يقدم ثبت اسئلته وتوجيهاته مستنداً الى خبرة سنين طويلة ودراسة مستمرة ، ولكنه لا يدعي ان هذا كل ما يمكن ان يسأل ولا خير ما يمكن ان يسأل ولكنه يطلب الى القارىء ان يجربها مع نفسه ، والى المدرس ان يجربها في فصله ، فاذا هو وجدها مثمرة فهذا كل ما يرجوه المؤلف . ولكن لا ينبغي لهذه الاسئلة ان تحفظ بشكل واحد متحجر فان فيها متسعاً للتنويع الفاظاً واسلوباً .

فموضوع الكتاب اذن هو كيف تبحث عن حل لمسألتك . وهذا بحث طرقه الاغريق وحام حوله غيرهم بعد عصر النهضة الاوروبية ، ولكن المؤلف يشق

في البحث طريقاً غير معبد ، معالمه ما تزال باهتـــة . فهو يستجد في بحثــه اصطلاحات ويحيي اصطلاحات حاولنا ان نجعل اللغة العربية تتسع لها . وفي مقدمة الاصطلاحات التي يحييها المؤلف كلمة « الهورستيكا » وهي دراسة طريقة البحث عن الحل – دراسة لم تبلغ بعد مبلغ التحديد الذي يجعلها علماً. والحل الذي يعنيه المؤلف هو اي حل ، حل اي مسألة ، رياضيـــة كانت او غير رياضية . ولكنه يرى ان المسألة الرياضية ، مسألة البرهان عن نظرية مثلاً ، يختلف البحث عن برهانها اختلافاً جوهرياً طبيعياً عن عرض البرهان نفسه . فالبرهان الهندسي يعرض مبنياً على بديهيات ونظريات معترف بها ، وكل خطوة من خطواتـــه يتوفر فيها اقصى ما يصل اليه العقل من رصانة وسند منطقي . اما البحث عن البرهان فليس له القواعد الرصينة التي للبرهان فهو لا يعتمد على بديهيات محدودة او نظريات مرسومة ، وانما هو كعلم الفيزياء والكيمياء يعتمد على البداهة وقوة التخيل والذكاء الفطري كما يعتمد على الملاحظة والتجربة . واذا كانت هذه كلها اموراً ليس بمقدورنا ان نمنحها للطالب فان من واجبنا ان نعتبر أن كل انسان قد وهب منها قدراً مقدوراً فلنجعل غايتنا اذن أن نروضها عند طلابنا وأن نتيح لهم أن يستعملوها ويمرنوها الى اقصى حد . فمثل الذي يبحث عن حل لأية مسألة كمثل رجل يسير في قاعة مظلمــة فهو يتلمس سبيله بحثاً عن معالم يعرفها تحدد له موضعه من القاعة عساه بعدئذ يشق طريقه الى المنفذ الذي يريده .

والذي يسير في القاعة المظلمة قد يدور، وهو لا يدري، في حلقة مفرغة ،او هو قد يرتطم بحائط او يتعثر او قد يفقد الامل فيقعد يندب حظه ، ان هو لم يحسن تلمس سبيله ولم يتذرع بالصبر والجلد والعزيمة الصادقة في الخروج من مأزقه وهذا هو شأن الذي يبحث عن الحل . فالأسئلة والتوجيهات التي يضمها ثبت المؤلف تقوده الى اكتشاف امارات تبين له طريق سيره وتعرفه ان كان يدور في حلقة اوكان يقترب من الحل او كان على شفا الوقوع في مأزق جديد ، وهي عدا ذلك تحول بينه وبين اليأس وتبعث في نفسه الامل بالفوز .

فسواء كانت المسألة رياضية او غير رياضية لا يتخذ البحث عن حلها شكلاً

رياضياً استنتاجياً رصيناً ، انما هو تلمس وتقدير وتخمين . اما الدقة الرياضية والرصانة المنطقية فيأتي دورهما بعد العثور على الحل وعلى هذا فلا ينبغي أن يمنعنا المنطق الرياضي من استعمال بداهتنا وقوة تخيلنا وشتى احاسيسنا من اجل تلمس سبيلنا الى الحل بأية طريقة ، استقرائية او استنتاجية ، تقديرية او يقينية ، تجريبية او برهانية . فنحن انما نحاول أن نبتكر الحل ، ان نخلقه ، وعندما نعثر عليه فليطمئن اهل الجباه العالية من الرياضيين والمنطقيين ان الحل ستتوفر فيه كل عناصر المنطق الرياضي .

وبين المؤلف واهل الجباه العالية حديث طويل يجده القارىء في هذا الكتاب . ولكن ليس هدفنا ان نلخص الكتاب للقارىء بل ان نقدمه اليه .

والكتاب كما تقدم رحلة في طريق غير معبد . فكل واحد في كل ساعة يبحث عن حل . والمسائل التي نحلها متباينة ولكن طرق البحث واحدة ، او هي محددة ، ونحن نجربها من حيث ندري ولا ندري . وهي لم تشرح شرحاً وافياً ولم تدرس دراسة كافية والموهوب من الناس يكتشفها كلها او بعضها بنفسه . الا ان الكتاب يحاول شرح هذه الطرق ودراستها عسى ان يكون في ذلك ما يساعد الموهوبين ، وما يساعد بشكل خاص مدرس الرياضيات في فصله كيما يكون هناك تجاوب بينه وبين طلابه وجو يتعلمون فيه الرياضيات من غير كره ومقت ومن غير ضجر وضيق . وفي هذا الصدد يبدو ان كل مدرس وقارىء مهما طالت خبرته بتدريس الرياضيات وحل مسائلها واجد في هذا الكتاب الصغير جديداً يفيد منه ومتعة تشوقه .

ثم اننا نحل مسائلنا ونبحث عن حلها بطرق نعرفها ونألفها ولكننا لا نملك التعبير عنها او لا نقدر على وصفها ، كالمرء الذي يمضغ طعامه فهو لا يصف كيف يمضغه وقد لا يعرف ان يصف . فالكتاب محاولة لهذا التعبير والوصف فانت واجد فيه اشياء معروفة عندك كما انك قد تجد فيه اسلوباً في التعبير لا يعجبك او لا يعبر عما في نفسك فتذكر أن المؤلف يحاول محاولة فريدة هي الاولى من

نوعها على هذا النطاق الواسع . فعسى الا يضيق القارىء بهذه التعبيرات ذرعاً وعسى ان يتسع صدره وصبره . ومن التعبيرات « مراجعة الحل » . فالمؤلف لا يعني بذلك المعنى السطحي المعروف للتعبير فان التحقق من صحة خطوات الحل امر هام عنده كما هو عند كل من يحل مسألة او يعلم حلها . ولكن التعبير عنده يعني دراسة الحل ، طريقته ونتيجتــه ، دراسة فاحصة ناقدة ، تعميماً وتخصيصاً ومقابلة ومقارنة كيما تهضمه وكيما يصير جزءاً من مخزون ذاكرتك مرتبطاً بمعلوماتك الاخرى . ومع هذا التعبير يتمشى عنده تعبير آخر هو « هل تلمح حلاً آخر ؟ » او « هل تراه بلمحــة » وكلا التعبيرين سيمران مع القارىء عدة مرات حتى يصل الى الموضع الذي فيه يتكشف له ما يعنيه المؤلف .

والكتاب فريد في تصنيفه وتبويبه كما هو فريد في موضوعه . فثمة مجموعة الاسئلة والتوجيهات التي سميناها « بالثبت » ، وهناك فصول ثلاثة تتعلق بها هي الفصل الاول والثاني والرابع وهي بمجموعها تؤلف الجزء الاقـــل من الكتاب . اما الجزء الاكبر وهو الفصل الثالث فيضم ٦٧ موضوعاً (مادة) بترتيب ابجدي هي في ظاهرها مواد متباينة متباعدة ولكنها في الواقع تتصل كلها بموضوع الكتاب . وهي قد مكنت المؤلف من دراسة موضوعــه في شتى النواحي وتناوله من مختلف الاتجاهات فكأنه في دراسته هذه انما يحل مسألة بالطريقة التي يوصي بها : قلّب المسألة وانظر اليها من شتى اطرافها ، افصــل اجزاءها بعضها عن بعض وانظر فيهــا جزءاً جزءاً ، فكك واربط ، جرب وجرب ، ولا تجعل اليأس يسيطر على نفسك .

واذ كان المؤلف بصدد البحث في طرق الحل المختلفة فقد كان لا بد له من البحث في طريقة التحليل والتركيب التي قد يكون بابس اول من اشار اليهـا وهي الطريقة التي بها نعتبر ما يطلب ايجاده موجوداً كي نتوصل الى علاقات او روابط بينه وبين المعطيات تساعد على حل المسألة .

ومن الطريف ان نذكر ان هذه الطريقة التي اشار اليها بابس عرفها العرب

وعملوا بها ونقلوها من مسائل الهندسة الى مسائل الحساب ، ولابراهيم بن سنان ابن ثابت بن قرة الحراني مقالة مطولة سماها « في طريق التحليل والتركيب » وقد طبعت المقالة في حيدر اباد الدكن في قرابة ٩٠ صفحة من الحجم المتوسط وهي ماتزال تنتظر من يدرسها دراسة متقنة مقارنة ويطبعها طبعة علمية محققة.

وفي هذه المقالة يقول ابراهيم بن سنان :

« اني وجدت اكثر من رسم طريقة للمتعلمين في استخراج المسائل الهندسية .. قد اتى ببعض الامر .. ولم يأت بجميعه لان كل واحد منهم يخاطب من قد امعن في الهندسة وارتاض في استخراج مسائلها وبقيت عليه بقايا ... »

« فرسمت في هذا الكتاب طريقاً للمتعلمين يشتمل على جميع ما يحتاج اليه في استخراج المسائل الهندسية .. بحسب طاقتي .. ثم ارشدت المتعلم الى طريق يعرف به .. كيف الوجه في التحليل وما يحتاج اليه فيه من التقسيم والاشتراط والوجه في التركيب وما يحتاج اليه من الاشتراط فيه » .

« وقد ينبغي لمن نظر في هذا الكتاب ان وجد فيه تقصيراً ان يعلم ان الانسان اذا ابتدأ بمعنى لم يكثر غيره الخوض فيه لم يخل من بعض التقصير لأن العلوم انما تنمى وتزاد بان يبتدىء واحد من الناس شيئاً منها ثم يزيد من يأتي بعده فيه ويصححه ويقومه فقد يجب على من وقف على تقصير ان يقول فيه بما يوجبه الحق وان يزيد اذا اقتضى الامر زيادة او ينقص ... »

وابراهيم بن سنان الذي يقول هذا القول توفي سنة ٣٥٥ هـ فلم يأت من بعده من يزيد في قوله او يصححه او يقومه ، بل ذهب هذا الضرب من البحث نسياً منسياً حتى قيض الله بعد عشرة قرون ان يقوم الاستاذ بوليا باعادة البحث الى الاذهان كموضوع تربوي هام يكرر فيه ما قاله ابن سنان قبل عشرة قرون .

وبعد فهذا كتاب يستحق ان يكون موضوع عناية كل طالب في العالم العربي وكل مدرس ، بل كل من يهتم بالتربية من قريب او بعيد .

اما الطالب فواجد فيه بشكل مبلور محدد الطريقة او الطرق التي تساعده على تلمس سبيله الى حل مسائله ، وهي طريقة او طرق لا ينقص من قيمتها ان جلها مما يهتدي اليه الطالب وحده ، فهو انما يهتدي اليها اذا ترك وشأنه بعد مران طويل ومراس طويل اذا وافاه الحظ وبقي عنده بقية من ارادة وعزم . ثم أليس مما يزيد ثقة الطالب بنفسه ويمد في آفاق طموحه ان يعرف ان هذه الطرق هي بعينها التي يتبعها المكتشفون الكبار والمخترعون العظام من حيث يعلمون او لا يعلمون ؟

واما المدرس فسيريه الكتاب ان تدريس الرياضيات فن ذو جمال وذو اصول ومقاييس وان الدرس الناجح لا يقل شأناً عن اللوحة الفنية الناجحة او القطعة الموسيقية الرائعة بل لعله اعظم اثراً اذ يخرج منه المدرس وقد طبع في اذهان طلابه فوق المعلومات المجردة حباً جديداً للبحث وثقة جديدة في النفس وأملاً جديداً في المستقبل . ومن هم طلابه ؟ هم رجال الغد العاملون الصالحون المنشئون الذين يقع على عاتقهم السير قدماً بوطنهم في موكب الحياة .

سيطرح مدرسٌ هذا الكتاب جانباً ويقول : مركب صعب يريد المؤلف ان نركبه . اجل انه كذلك ، وعلى قدر نجاح المدرس في ركوب هذا المركب يحدد كفاءته في مهنته وقابليته لاداء رسالته ، وفي ذلك فليتنافس المتنافسون . فالتربية ليست معلومات تلقى فحسب والا لاستغنى الناس عنها بالموسوعات والقواميس . انها حفز للمواهب الكامنة وتأسيس للعادات الحسنة وحرب على العادات السيئة وتهيئة للطالب كي يكون عضواً عاملاً في الحياة يستغل في عمله كل مواهبه وكل ذكائه .

وسيقول مدرس : ولكننا من قديم نستدرج الطلاب استدراجاً . فاذا كان المؤلف يذكر اكثر من مرة ان قد خبر تدريس الرياضيات في شتى مراحلها

سنين طويلة فرجاؤنا ان يتسع صدر القارىء اذا ذكر المترجم انه خبر تدريسها والاشراف على تدريسها سنين طويلة في اكثر من قطر عربي واكثر من مرحلة واحدة وفي شتى المعاهد العلمية الاكاديمية منها والمهنيــة . فاذا كان المدرس في معهد التربية او في درس نموذجي يتبع بعضاً مما يلحّ عليه المؤلف في هـــذا الكتاب فهذا لا يكفي . وهو لا يكفي بدليل رواج الكتب المدرسية التجارية التي وضعها مؤلفون لا يملكون الخبرة ولا الكفاءة ولا يقدرون المسؤولية ، وبدليل بقاء الكتب القديمة العهد ، وظهور كتب تنصب على غاية محـدودة هي الاجابة عن اسئلة الامتحان وتكاد طريقة عرضها تقتصر على شكل واحد هو : اذا سئلت عن كذا فأجب بكذا . وهو لا يكفي بدليـل ان الاعتقـاد التقليدي – واكاد اقول الرسمي – في معاهـد عدة ان تدريس الرياضيات هو اسهل المهن ولذا يوكل الى من لا يملك الكفاءة على تدريس ما عداها ، بل – ماذا اقول ؟ هل كل مدرس للرياضيات يعرف اكثر ولو قليلاً مما ينقله الى طلابه أو ما يجده في كتابه ؟

قد يكون لا مناص لنا من اختصار الطريق والاستفادة من تجـــارب امم سبقتنا بتجربة شتى الكتب والمقررات وشتى اساليب التأليف والتدريس وعالجت الامر من نواحيه العملية والنظرية والنفسيـــة . ولكن الكتاب المدرسي الذي ينبغي ان يكون هدفنا المنشود كتاب عربي وضعته يد عربية ضمت الى فهم هذه التجربة تجربتها الواسعة ومعرفتها العميقة بنفسية الجيل العربي وحاجته ومطامحه ومشاكله .

ومن عجب ان صحافتنا في الآونة الاخيرة خطت خطوات واسعة الى الامام واساليب التدريس عندنا احرزت بعض التقدم ، ولكن التأليف –ولا سيما تأليف الكتاب المدرسي – لم يسايرها ، ولم تعره الصحافة ولا الرأي العام التفاتاً برأي ناقد بانٍ موجه او باهتمام واعٍ بالتربية وشئونها .

بقيت كلمة من حق القارىء على المترجم ان يذكرها بصدد الترجمة . فمنذ تبين لي ان الكتاب جولة رائعة في معركة فكرية قائمة رأيت ان اتناوله بمثل ما يتناول المترجمون النصوص أو ما قارب ذلك فانقل للقارىء رأي المؤلف كاملا غير محرف وغير معدل وغير متأثر برأيي أو طريقتي في العرض . حتى في المواضع التي يتجه فيها البحث اتجاهاً لغوياً أو اقليمياً يلائم القارىء الانجليزي ولا يلائم القارىء العربي . لم احذف ولم اختصر ولكني تحايلت حتى يكتمل المعنى الذي يريده المؤلف لا اكثر ولا اقل . الا انني وقفت امام مسألتين من مسائل الكتاب كلتاهما حول كلمة انجليزية من الكلمات المتقاطعة . وهنا كانت المشكلة فان الكلمات المتقاطعة لم تدرج في حياتنا الاجتماعية والفكرية ثم ان اللفظتين مما يقرأ يمنة ويسرة ، واللفظة (الواحدة) العربية التي تقرأ يمنة ويسرة تسهل معرفتها ولا تقتضي كل العمليات الذهنية التي تقتضيها اللفظة الانجليزية . ففي احدى هاتين المسألتين جعلت البحث يدور حول كلمة عربية ان لم تطابق الكلمة الانجليزية من حيث اثارتها للمشاكل الذهنية فهي تقاربها ، وفي المسألة الثانية استبقيت اللفظة الانجليزية نفسها ، وفي هذا حصر لفائدة البحث على من يعرفون الانجليزية ، ولكنه حصر لا حيلة لي فيه .

المترجم

الخرطوم ١ تشرين الثاني (نوفمبر) ١٩٥٩

من تصدير الطبعة الاولى

الاكتشاف العظيم حل لمسألة عظيمة ، ولكن في حل اي مسألة من المسائل ذرة من الاكتشاف . فقد يكون امامك سؤال بسيط ، ولكن اذا هو أثار عندك حب الاستطلاع واستثار لديك قوى الابداع فحللته بطريقة من عندك فقد تعتريك آنئذ هزة الفوز ونشوة الاكتشاف . ومثل هذه التجربة في سن التطبع قد تخلق تذوقاً للعمليات الذهنية فتترك طابعها على الفكر والسلوك مدى الحياة .

ولذا فان لدى مدرس الرياضيات فرصة كبيرة . فاذا هو أمضى الوقت المخصص له يمرن الطلاب على عمليات تكرارية فانه يقتل شوقهم ويعرقل نمو أذهانهم ويضيع عليهم الفرصة . اما اذا هو اثار حب الاستطلاع عندهم بمسائل تتناسب مع معلوماتهم وساعدهم على حل هذه المسائل عن طريق اسئلة مشجعة فقد يكسبهم تذوقاً للتفكير المستقل وبعضاً من وسائله .

وكذلك لدى الطالب الذي يشمل منهاجه الجامعي شيئاً من الرياضيات فرصة فريدة . ولكن اذا كان ممن يعتبر الرياضيات موضوعاً عليه ان يحصل فيه كذا من الدرجات ثم ينساه حالما يغادر قاعة الامتحان فان الفرصة ستفلت منه حتماً . وهي قد تفلت حتى وان كان لديه ميل طبيعي للرياضيات ، ذلك انه — كأي فرد آخر — عليه ان يتلمس مواهبه وميوله فهو لا يملك ان يعرف انه يحب الفطير ان لم يذقه ولكنه ربما اكتشف ان المسألة الرياضية مسلية كلغز في الكلمات المتقاطعة وان الاعمال الذهنية النشطة امر مرغوب فيه بقدر الرغبة في لعبة تنس حامية .

فاذا هو ذاق ما في الرياضيات من متعة فعندئذ لا يسهل عليه نسيانها ، ولا يبعد ان تغدو عنده ذات شأن فتصير هوايته او اداة له في مهنته ، أو مهنته عينها ، او مطمحه الكبير .

والمؤلف يذكر يوم كان تلميذاً في المدرسة لا يخلو من طموح ، انه كان يرغب في معرفة شيء عن الرياضيات والفيزياء . فهو يستمع الى المحاضرات ويقرأ الكتب ويحاول ان يتفهم الحلول والحقائق التي تعرض عليه ، ولكن سؤالاً واحداً كان لا يفتأ يراوده مرة بعد مرة :

« أجل ، هذا الحل يبدو عملياً ، وهو يبدو صحيحاً ، ولكن كيف السبيل الى ابتكار حل مثله ؟ أجل هذه التجربة تبدو عملية ، وهي تبدو حقيقة اكيدة ، ولكن كيف يكتشف الناس هذه الحقائق و كيف يتاح لي ان ابتكر او اكتشف مثل هذا بنفسي ؟ »

والمؤلف يعمل اليوم بتدريس الرياضيات في الجامعة ، وهو يظن او يأمل ان يكون بين طلابه المتطلعين من يسائلون انفسهم مثل هذه الاسئلة فيحاول ان يجيب عن تساؤلهم. وهو اذ لم يقنع بالوقوف عند فهم هذا الحل او ذاك بل حاول ان يتعمق دوافع الحل وخطواته ، وان يفسر هذه الدوافع والخطوات لغيره ، ادى به الامر الى وضع هذا الكتاب . فهو يرجو ان يكون ذا فائدة للاساتذة الذين يهمهم ان ينموا ملكات طلابهم في حل المسائل وللطلاب الذين يهمهم ان تنمو ملكاتهم .

والكتاب يعنى بشكل خاص بما يلزم طلاب الرياضيات واساتذتها ، ولكنه سيشوق اي شخص له اهتمام بطرق الاكتشاف والاختراع ووسائلها . وهذا الاهتمام قد يكون اوسع انتشاراً مما يظن المرء لأول وهلة . فالمجال الذي تفسحه الصحف والمجلات للكلمات المتقاطعة وغيرها من الاحاجي ، دليل على ان الناس يبذلون بعض الوقت في حل مسائل ليست ذات فائدة عملية . وربما كان وراء الرغبة في حل هذه المسألة او تلك مما لا يرجى منه فائدة مادية رغبة اعمق في فهم

الطرق والوسائل والدوافع والخطوات للحلول العامة .

والصفحات التالية كتبت بايجاز نوعاً وبلغة سهلة بقدر الامكان ، وهي مبنية على دراسة طويلة عميقة لطرق الحل — تلك الدراسة التي سماها بعض الكتاب بالهورستيكا (Heuristic) وهي دراسة لا يعنى بها اليوم ، ولكن كان لها ماض كبير ، وربما يكون لها مستقبل .

ونحن اذ ندرس طرق حل المسائل نرى وجهاً جديداً للرياضيات . أجل ، فالرياضيات ذات وجهين فهي علم اقليدس الرصين ، وهي ايضاً شيء آخر . وهي اذ تعرض على طريقة اقليدس تبدو علماً استنتاجياً منظماً ، ولكنها في دور الخلق والابتكار علم تجريبي استقرائي . وكلا الوجهين قديم قدم الرياضيات نفسها . ولكن الوجه الثاني احدث باعتبار واحد ذلك ان الرياضيات في مرحلة الخلق والتكوين لم تعرض ابداً بشكلها هذا لا على الطالب ولا على المدرس ولا على الجمهور .

والهورستيكا ذات روابط بموضوعات كثيرة فعلماء الرياضيات والمنطق وعلم النفس ، ورجال التربية ، حتى والفلاسفة — كل يدعي انها ، في بعض نواحيها ، تقع في دائرة اختصاصه . والمؤلف اذ يدرك تمام الادراك انه قد يتعرض الى النقد من اوساط شتى ، ويعرف تمام المعرفة حدوده ، يود ان يتقدم بادعاء واحد وهو ان لديه بعض الخبرة في حل المسائل وفي تدريس الرياضيات في مختلف المراحل.

والموضوع سيعالجه المؤلف معالجة اوفى في كتاب اضخم اوشك ان يفرغ منه .

جامعة ستانفورد

١ آب (اغسطس) ١٩٤٤

من تصدير الطبعة السابعة

يسرني ان قد تمكنت من الوفاء ببعض ما وعدت به في تصدير الطبعة الاولى فالمجلدان : الاستقراء والقياس في الرياضيات Induction and Analogy in Mathematics ، واساليب الاستدلال المعقول Patterns of Plausible Inference اللذان يؤلفان مادة كتابي الحديث : الرياضيات والتفكير المعقول Mathematics and Plausible Reasoning هما تتمة للمادة الفكرية التي بدأتها بكتابي هذا : « البحث عن الحل » .

زوريخ ، ٣٠ آب (اغسطس) ١٩٥٤

تصدير الطبعة المنقحة الثانية

تضيف هذه الطبعة المنقحة الثانية جزءاً رابعاً جديداً هو « مسائل وتلميحات وحلول » ، هذا عدا بعض التحسينات الثانوية .

عندما كانت هذه الطبعة المنقحة تحضر للطباعة ظهر بحث : (**Educational Testing Service, Princeton, N. J. cf. Time, June 18, 1956**) يظهر انه عبر عن بعض الملاحظات التي تعنينا – ملاحظات قد لا يجهلها العارفون ولكنها تعرض لأول مرة على الجمهور – « .. يكون للرياضيات شرف انها اقل مواد التدريس حظوة لدى الطلاب ... ان مدرسي المستقبل يتركون المدرسة الابتدائية وقد تعلموا كره الرياضيات ... يعودون اليها بعد حين لينقلوا كرهها للجيل الجديد .. » .

واني ارجو ان يكون في هذه الطبعة المنقحة التي اعدت لانتشار اوسع ما يقنع بعض القراء بان الرياضيات فوق كونها معبر ضروري للمهن الهندسية والمعرفة العلمية يمكن ان تكون تسلية ومتعة ويمكن ان تكون مشهداً من مشاهد النشاط الذهني في اعلى مراتبه .

زوريخ ، ٣٠ تموز (يوليو) ١٩٥٦

ثبت البحث عن الحل

اولاً :	**فهم المسألة**
يجب ان تفهم المسألة	ما المجهول ؟ ما المعطيات ؟ ما الشرط ؟ هل يمكن ان يتحقق الشرط ؟ هل يكفي الشرط لتعيين المجهول ؟ ام فيه نقص ؟ ام فيه لغو ؟ ام فيه تناقض ؟ ارسم شكلاً وضع الرموز المناسبة . افصل اجزاء الشرط بعضها عن بعض . هل يمكن ان تكتبها ؟
ثانياً :	**ابتكار الخطة**
اوجد الرابطة بين المعطيات والمجهول .	هل رأيت المسألة من قبل ؟ هل رأيتها بشكل آخر قريب ؟ هل تعرف مسألة ذات صلة بمسألتك ؟ هل تعرف نظرية قد تفيدك ؟ انظر الى المجهول . وحاول ان تتذكر مسألة تعرفها فيها هذا المجهول او مجهول يشبهه .
قد تضطر الى التفكير في مسائل مساعدة ، اذا لم تستطع ان تجد رابطة مباشرة .	هذه مسألة ذات صلة بمسألتك وقد حلت من قبل . هل يمكنك ان تستعملها ؟ هل يمكنك ان تستعمل نتيجتها ؟ هل يمكنك ان تستعمل طريقتها ؟ اينبغي عليك ان تدخل عنصراً جديداً مساعداً كي يمكنك ان تستعملها ؟

يجب أن تحصل في النهاية على خطة للحل .

هل يمكنك ان تذكر المسألة بعبارة من عندك ؟ هل يمكنك ان تذكرها بعبارة اخرى؟ ارجع الى التعاريف .

اذا لم تستطع ان تحل هذه المسألة فجرب ان تحل اولا مسألة ذات صلة بها . هل تذكر مسألة ذات صلة بها اسهل حلاً ؟ مسألة أعم ؟ مسألة أخص ؟ مسألة على قياسها ؟ هل يمكنك ان تحل قسماً من المسألة ؟ خذ جزءاً من الشرط واهمل الباقي : فالى اي حد يتحدد الآن المجهول ؟ كيف يمكنه ان يتغير ؟ هل يمكنك ان تستنتج شيئاً مفيداً من المعطيات ؟ هل يمكنك ان تفكر في معطيات اخرى مناسبة لايجاد المجهول ؟ هل يمكنك ان تغير المجهول او المعطيات او كليهما اذا لزم الامر الى مجهول ومعطيات اقرب الى بعض؟

هل استعملت كل المعطيات ؟ هل استعملت الشرط كله ؟ هل اخذت بعين الاعتبار كل المبادىء الجوهرية في المسألة ؟

ثالثاً :
نفذ خطتك

تنفيذ الخطة

اثناء تنفيذ خطتك للحل ، حقق كل خطوة . هل يمكنك ان ترى بوضوح ان الخطوة صحيحة ؟ هل يمكنك ان تثبت صحتها ؟

رابعاً :
افحص الحل الذي حصلت عليه

المراجعة

هل يمكنك ان تحقق النتيجة ؟ هل يمكنك ان تحقق الطريقة ؟ هل يمكنك ان تجد النتيجة بطريقة اخرى ؟ هل يمكنك ان تتصورها بلمحة ؟ هل يمكنك ان تستعمل النتيجة او الطريقة في مسألة أخرى ؟

مقـــدمـــة

البحث التالي يتجمع كله حول ثبت الاسئلة والتوجيهات السابقة الذي جعلنا عنوانه « البحث عن الحل » وكل سؤال او توجيه نقتبسه من هذا الثبت في ثنايا الكتاب سنشير اليه بوضع خط تحته. اما الثبت نفسه فنشير اليه باسم« الثبت».

وفي الصفحات التالية بسط للغرض من هذا الثبت وشرح لطريقـة استعماله مشفوع بالامثلة ، وتوضيح للمبادىء والعمليات الذهنية التي ينطوي عليهـا . وصفوة القول ان الذي يحسن استعمال هذه الاسئلة والتوجيهات اذا هو وجههـا الى نفسه فقد تساعده في حل مسائله ، واذا هو وجهها الى طلابه فقد تساعدهم في حل مسائلهم .

ويقع الكتاب في أربعة فصول :

عنوان الفصل الأول : « في حجرة الدرس » . وهو يضم عشرين قسماً نشير اليها في الكتاب مرقمة بارقـام . وفي الاقسام ١ الى ٥ شرح عام للغرض من الثبت . وفي الاقسام ٦ الى ١٧ شرح للتقسيمات الرئيسية والاسئلة الرئيسيـة في الثبت ثم اول مثال عملي وفي الاقسام ١٨ ، ١٩ ، ٢٠ ، امثلة اخرى .

والفصل الثاني موجز للغاية وعنوانه « البحث عن الحـل » . وهو مكتوب بشكل حوار يجيب فيه مدرس مثالي على الاسئلة القصيرة لطالب مثالي .

والفصل الثالث ، وهو أوسع فصول الكتاب ، سميناه « قاموس موجز في الهورستيكا » وسنشير اليه بكلمة «القاموس » وهو يضم ٦٧ مادة بترتيب ابجدي. فكلمة هورستيكا لها مادة تشرح معناها . وفي شرح بعض مواد القاموس تجـد فقرات ذات صبغة تقنية وهـذه وضعناها بين قوسين مربعين [ ] . وبعض المواد مرتبط الى حـد ما بالفصل الاول فهو يضم امثلة اضافية توضحـه

وملحوظات اكثر تفصيلاً . وبعضها يتجاوز مرمى الفصل الاول الى فهم اعمق للاساس الذي بني عليه . وهناك مادة اساسية باسم الهورستيكا المعاصرة وفيها شرح للصلة بين المواد الرئيسية والخطة العامة للقاموس ، وهي تحوي ايضاً ارشادات توضح سبيل الحصول على معلومات عن اجزاء الثبت المختلفة . وينبغي ان نؤكد ان ثمة خطة مشتركة ووحدة عامة رغم ان مواد القاموس تشير في ظاهرها الى تنويع واسع . ويضم القاموس بضع مواد مطولة فيها بحث منظم موجز لبعض المبادىء العامة ، ومواد فيها ملحوظات حول امور معينة خاصة واخرى لا تزيد على اشارات تدلك اين تبحث عن فكرة معينة أو تعطيك معلومات تاريخية أو مقتبسات او امثالا او مُلحاً .

ولا ينبغي ان يمر القارىء على القاموس مستعجلاً فمواده هي على الغالب موجزة مكتنزة ، وهي في بعض المواطن دقيقة حاذقة ولكن يستحسن ان يرجع اليه القارىء بين حين وحين لاستيضاح نقاط معينة . وقد تعرض هذه النقاط له او لطلابه اثناء حل المسائل فعندها يعطي القاموس فائدة اجل .

وعنوان الفصل الرابع : «مسائل وتلميحات وحلول» . وهو يعرض للقارىء الطموح مسائل يتبعها « تلميحات » تساعد على اكتشاف النتائج المشروحة في « الحلول » .

وقد استعملنا لفظي « الطالب » و « المدرس » فيما مضى بكثرة وسنذكرهما مراراً وتكراراً فيما بعد. فحري اذن ان نشير الى ان كلمة «الطالب » يقصد بها اي تلميذ سواء كان في مدرسة ثانوية أو كلية جامعية أو اي فرد يدرس الرياضيات ، كما ان كلمة « المدرس » يراد بها كل من يقوم بتدريس الرياضيات سواء كان في مدرسة ثانوية او كلية جامعية وكل من يعني باساليب تدريسها .

والمؤلف ينظر الى الامر تارة من ناحية الطالب وطوراً من ناحية المدرس (والاخير هو الارجح في الفصل الاول) . ولكن معظم المادة (ولا سيما في الفصل الثالث) ينظر اليها من زاوية شخص لا طالب ولا مدرس بل هو فرد امامه مسألة يبغي لها حلاً .

١ في حجـــرة الدرســـ

الهــــدف

١ **مساعدة الطالب** : ان من اهم واجبات المدرس مساعدة طلابه . وهذا الواجب ليس بالسهل فهو يتطلب زمناً ومراناً وتضحية ومبادىء رصينة .

فالطالب عليه ان يكتسب أوسع ما يمكن من خبرة بالعمل المستقل. ولكن اذا هو ترك يجابه مسائله وحده بدون مساعدة او بمساعدة مبتسرة فقد يعوقه ذلك عن التقدم ، وان ساعده المدرس اكثر مما يجب فقد لا يبقي له ما يعمله . لذلك يجدر ان تكون مساعدة المدرس وسطاً لا إفراط ولا تفريط حتى يبقى للطالب نصيب معقول من العمل .

وان عجز الطالب عن العمل بنفسه فعلى المدرس ان يبقي له ولو قسطاً وهمياً من العمل المستقل . ومن اجل ذلك ينبغي ان ترد مساعدة المدرس بحذر وفطنة لا تطفل فيها ولا اقحام .

والافضل ولا شك ان ترد هذه المساعدة طبيعية بعد انيضع المدرس نفسه في موضع الطالب فيبصر وجهة نظره ويتلمس ما يدور في خلده ثم يلقي سؤالا او يشير الى خطوة قد تخطر على بال الطالب نفسه .

٢ - **الاسئلة والتوجيهات والعمليات الذهنية** . اذا حاول المدرس ان يساعد طلابه مساعدة فعالة طبيعية لا اقحام فيها سيجد ان هناك اسئلة يسألها وخطوات يشير اليها مرة بعد مرة . ففي كثير جداً من المسائل عليه ان يلقي بالسؤال : ما المجهول ؟ وقد يغير الكلمات فيسأل السؤال نفسه بالفاظ اخرى كقوله : ما المطلوب ؟ ما الذي تريد ان تجده ؟ ما الذي ينبغي ان تبحث عنه؟

والغرض من هذه الاسئلة كلها هو تركيز ذهن الطالب على المجهول . وقد نحصل على النتيجة نفسها بشكل طبيعي اذا قدمنا توجيهاً بدل السؤال كقولك انظر الى المجهول . فالاسئلة والتوجيهات تؤدي الى نتيجة واحدة وترمي الى إثارة عملية ذهنية واحدة .

وقد دار في خلد المؤلف ان قد يكون من المفيد ان يجمع ويبوب نماذج من الاسئلة والتوجيهات التي تفيد في مناقشة المسائل مع الطلاب . والثبت الذي ندرسه يحوي نماذج من هذا القبيل مختارة ومبوبة بعناية وهي مفيدة ايضاً لمن يحل المسألة بنفسه . فاذا تعرف القارىء على الثبت تعرفاً كافياً وانعم النظر فيما وراء التوجيه فقد يدرك ان الثبت يعدد بصورة غير مباشرة نماذج من عمليات ذهنية تفيد في حل المسائل ، وهذه العمليات مرتبة بالترتيب الذي يغلب انها ترد على الخاطر فيه .

٣ - **الاسئلة والتوجيهات عامة :** وهذه احدى مزاياها الهامة . خذ الاسئلة : ما المجهول ؟ ما المعطيات ؟ ما الشرط ؟ انها اسئلة عامة قد توجه في اي مسألة من المسائل فتؤدي الى نتيجة طيبة . واستعمالها لا ينحصر في موضوع واحد ، فسواء كانت المسألة جبرية او هندسية ، رياضية او غير رياضية ، نظرية او عملية ، جدية او مجرد احجية للتسلية ، كل ذلك لا يهم بل المهم ان السؤال ذو معنى وانه قد يؤدي الى حل المسألة .

ولكن ثمة تحديداً في الواقع ولكنه تحديد لا دخل له بمادة الموضوع ، فبعض الاسئلة والتوجيهات تنطبق على المسائل التي يطلب فيها « ايجاد شيء » فقط ولا تنطبق على المسائل التي يطلب فيها « البرهان على شيء » . فاذا كانت مسألتنا من النوع الثاني فعلينا ان نستعمل اسئلة غير هذه . انظر المادة « مسائل الايجاد ومسائل الاثبات » في القاموس .

٤ – **الادراك الفطري :** الاسئلة والتوجيهات التي في ثبتنا عامة ، ولكنها فيما عدا ذلك طبيعية بسيطة واضحة لا غموض فيها ومنبثقة عن الادراك الفطري الصراح . خذ مثلاً التوجيه التالي : انظر الى المجهول ، وحاول ان تتذكر مسألة تعرفها فيها هذا المجهول او مجهول يشبهه . انه يقترح عليك ان تعمل ما انت

ستعمله على كل حال حتى ولو لم يقدم اليك ، اذا ما صح عزمك على حل المسألة .
أأنت جائع ؟ فانت تريد ان تحصل على الطعام ولذلك تفكر في الطرق المألوفة للحصول على الطعام . أعندك مسألة تقتضي عملية هندسية ؟ فأنت تريد ان ترسم مثلثاً ، ولذلك تفكر في الطرق المألوفة لرسم المثلث . أعنـدك مسألة من اي نوع ؟ ان ثمة مجهولاً تريد ان تحصل عليه ، فانت تفكر في الطرق المألوفـة للحصول على هذا المجهول او مجهول يشبهه . فاذا انت عملت ذلك فانت تسير على نهج التوجيه الذي في الثبت ، وانت تسير في الطريق الصحيح . فالتوجيه مفيد لأنه يوجه في طريق طالما أدى الى الحل الصحيح .

وكل الاسئلة والتوجيهات في ثبتنا طبيعية بسيطة ظاهرة للعيان مستمدة من الادراك الفطري ولكنها تعبر عن هذا الادراك الفطري بلغة عامة . فهي تقترح المسلك الذي يسلكه فعلاً كل شخص يهمه حل مسألته ولديه شيء من هـذا الادراك الفطري . ولكن الشخص الذي يتبع السبيل السوي في حله قد لا يهمه ان يعبر عن مسلكه هذا بصورة واضحة ، او قد لا يستطيع ، فالثبت محاولة لتأدية مثل هذا التعبير .

٥ – **المدرس والطالب ، والتقليد والتمرين :** هنالك هدفان يجدر أن يتوخاهما المدرس حينما يلقي على طلابه توجيهاً او سؤالاً من هذا الثبت ، فالاول ان يساعد الطالب في حل المسألة التي بين يديه ، والثاني ان ينمي ملكة الطالب كيما يصير بامكانه ان يحل مسائله في المستقبل بنفسه .

وقد دلت التجربة على ان هذه الاسئلة والتوجيهات اذا استعملت بحكمـة فكثيراً ما تساعد الطالب لانهما ميزتين مشتركتين ، فهي فطرية بديهية وهي عامة . واذ هي تنجم عن الادراك الفطري فهي تأتي على الغالب طبيعية وقد تكون سنحت للطالب نفسه ، واذ هي عامة فهي تساعد الطالب بلا تطفل ولا اقحام ، انها لا تزيد على ان تشير الى اتجاه عام ثم تترك للطالب مهمة السير فيه .

والهدفان اللذان تقدم ذكرهما مترابطان متلاصقان، فاذا نجح الطالب في حل المسألة التي بين يديه ، فقد زاد قليلاً في مقدرته على حل المسائل . ولنذكر ان

الاسئلة عامة يمكن تطبيقها في حالات كثيرة . فاذا تكررت فائدة السؤال ،فهو لن يغيب عن ذهن الطالب وسيعن له ان يلقيه على نفسه في الحالات المماثلة ، فاذا كرر الطالب السؤال فقد ينجح مرة من تبين الفكرة الصحيحة ، وهذا النجاح يفضي به الى استعمال السؤال استعمالاً صحيحاً ، وعندئذ يكون قد فهمه فهماً تاماً .

وقد يتوصل الطالب الى فهم بعض الاسئلة من ثبتنا فهماً عميقاً يجعله قادراً على ان يوجه لنفسه السؤال المناسب في الوقت المناسب، وان يقوم بالعملية الذهنية المناسبة بصورة طبيعية ونشيطة . مثل هذا الطالب يكون قد جنى اعظم فائدة يمكن ان يقدمها الثبت . فما العمل كيما يحصل المدرس على هذه النتيجة القيمة ؟

ان حل المسائل ، كالسباحة ، مهارة عملية . ونحن انما نحصل على المهارة العملية بالتقليد والمران ، فالذي يحاول السباحة يقلد حركات السابحين بايديهم وأقدامهم لتبقى رؤوسهم فوق الماء ، ثم هو يتعلمها بالتمرن . وكذلك الذي يحاول حل المسائل عليه ان يراقب ما يعمله غيره ويقلدهم ثم هو يتعلم الحل بالتمرن على الحل .

والمدرس الذي يبتغي أن ينمي ملكة طلابه في حل المسائل عليه أن يثير في اذهانهم بعض الاهتمام وان يفسح لهم المجال للتقليد والتمرن . واذا هو اراد ان تنشط لديهم العمليات الذهنية التي ترافق اسئلة الثبت وتوجيهاته ، فيجب أن يلقيها عليهم مرة بعد مرة ،شرط أن تصدر طبيعية لا تكلف فيها . وفوق ذلك فهو يستطيع ان ينتهز فرصة حله لمسألة امامهم فيجري ما يشبه تمثيلية يلقي فيها على نفسه تلك الاسئلة التي يلقيها على طلابه ، وبذا يتفق للطالب بعد حين اكتشاف طريقة استعمال هذه الاسئلة والتوجيهات استعمالا صحيحاً ، ويكون قد جنى فائدة اعظم من مجرد التعرف على حقيقة من حقائق الرياضيات .

التقسيمات الرئيسية والاسئلة الرئيسية

٦ **المراحل الاربعة :** اثناء البحث عن حل كثيراً ما نغير وجهة نظرنا

والزاوية التي ننظر منها الى المسألة ، فننتقل من موقف الى موقف ، مرة بعد مرة . وفهمنا للمسألة قد يكون في البدء ناقصاً ، فاذا تقدمنا في سبيل الحل تتغير وجهة نظرنا ، وهي تتغير ايضاً عندما نشارف اكتشاف الحل .

فلكي نبوب اسئلة الثبت وتوجيهاته تبويباً مناسباً يجدر ان نميز بين مراحل اربع لحل اي مسألة :

اولاها : فهم المسألة وهنا ينبغي ان نتبين المطلوب بوضوح . والثانية : فهم الروابط بين عناصر المسألة وصلة المجهول بالمعطيات كي تتجلى لنا فكرة الحل ونتمكن من رسم خطته . والثالثة : تنفيذ الخطة . والرابعة : مراجعة الحل حين يكتمل ومناقشته .

ولكل واحدة من هذه المراحل اهميتها . ولكن قد يحدث ان طالباً يلمح فكرة نيرة باهرة فيعطي الحل طفرة متخطياً جميع التحضيرات . ومثل هذه اللمحات المحظوظة امر نرحب به كل الترحيب ، لا ريب في ذلك . ولكن الامر الذي نخشاه ولا نرغب فيه هو أن يتخطى الطالب اياً من هذه المراحل بدون ان تكون لديه الفكرة الموفقة . فلا شيء اسوأ من مباشرة العمليات الحسابية او الانشائية قبل فهم المسألة . ومن العبث عموماً القيام بالتفاصيل قبل وضوح الرابطة الرئيسية ورسم الخطة . وما اكثر الاخطاء التي يمكن تجنبها لو روجعت كل خطوة اثناء الحل . اما اعادة النظر في الحل بعد أن يكتمل ففي اهمالها مضيعة لبعض اهم النتائج .

٧ – **فهم المسألة :** من الحمق ان تجيب عن سؤال لا تفهمه ومن المؤسف أن تعمل من اجل غاية لا ترغبها . ومثل هذا وذاك يحدث كثيراً داخل المدرسة وخارجها فعلى المدرس ان يمنع حدوثه في فصله . وعلى الطالب ان يفهم السؤال وفوق ذلك عليه ايضاً ان يعقد العزم على حله . واذا ما اعترى فهمه او عزمه نقص فليس الذنب دائماً ذنبه لأن الواجب حسن اختيار المسائل فلا تكون اصعب مما يحتمل الطالب ولا اسهل مما يثير اهتمامه ويجدر أن تكون هذه المسائل طبيعية شائقة وربما لزم بعض الوقت لعرضها بمثل هذه الصورة .

وقبل كل شيء ينبغي أن تعرض المسألة بلغة مفهومة . وباستطاعة المدرس ان يتأكد من ذلك الى حد ما فيسأل احد الطلاب ان يعيد نص المسألة وينبغي ان يكون بامكانهم انيعيدوه بطلاقة . كما ينبغي ان يعرفوا عناصر المسألة الرئيسية، المجهول والمعطيات والشرط . ولذا يجد المدرس ان لا بد من القـاء الاسئلة : ما المجهول ؟ ما المعطيات ؟ ما الشرط ؟

وعلى الطالب ان يمعن النظر في العناصر الرئيسية للمسألة ويقلبها من جوانب عدة ، واذا كان ثمة شكل يرتبط بالمسألة فعليه ان يرسم الشكل ويشير عليه الى المجهول والمعطيات . واذا احتاج الامر الى اعطاء اسماء لهذه العناصر فعليه ان يختار الرموز المناسبة ، وفي اختياره للرموز يضطر الى انعام النظر في هـــذه العناصر من جديد . وهناك سؤال آخر قد يكون مفيداً فيهذه المرحلةالتمهيدية شرط الا نتطلب منه جواباً محدداً بـل نكتفي بجواب مؤقت تخميني ، وهـذا السؤال هو : هل يمكن ان يتحقق الشرط ؟ (وفي الفصل الثاني يجد القارىء اننا قسمنا « فهم المسألة » الى مرحلتين هما « التعرف عليها » ثم « محاولة الوصولالى فهم اعمق ») .

٨ – **مثال :** لنوضح الآن بعض النقاط التي وردت في القسم السابق، ولنأخذ هذه المسألة البسيطة : اوجد قطر متوازي المستطيلات اذا عرفتطوله وعرضه وارتفاعه .

كي تكون مناقشة هذه المسألة مجدية يلزم ان يكون الطلاب قد ألفوا نظرية فيثاغورس وبعض تطبيقاتها في الهندسة المستوية . اما الهندسة المجسمة فيكفي من امرها قليل من المعرفة النظامية اذ يمكن للمدرس ان يعتمد في هذه الحالة على ادراك الطالب ببداهته للعلاقات الفراغية .

وفي مقدور المدرس ان يجعل المسألة شائقة بتحويلهـــا الى مسألة ملموسة ، فحجرة الدراسة متوازي مستطيلات يمكن قياس ابعاده او تقديرها . فعـــلى الطلاب ان يوجدوا قطر الحجرة بعد معرفة الطول والعرض والارتفاع ويستطيع المدرس ان يشير الى القطر مرة بعد مرة ثم يزيد الامر تشويقاً بوضـع رسم على

السبورة يربط بينه وبين حجرة الدرس بجلاء .

واليك الحوار الذي قد ينشأ بين المدرس والطلاب .

« ما المجهول ؟ »

« طول قطر متوازي المستطيلات » .

« ما المعطيات ؟ »

« طول متوازي المستطيلات وعرضه وارتفاعه » .

« لنضع الرموز المناسبة ، ماذا نسمي المجهول ؟ »

« س » .

« اي رموز نختار للطول والعرض والارتفاع ؟ »

« أ ، ب ، ج » .

« ما الشرط الذي يربط بين أ ، ب ، ج و س ؟ »

« س هو قطر متوازي المستطيلات الذي ابعاده أ ، ب ، ج » .

« هل السؤال معقول ؟ اعني هل الشرط يكفي لتعيين المجهول ؟ »

« نعم فاذا عرفنا أ ، ب ، ج ، نعرف متوازي المستطيلات ، واذا عرفناه يتعين قطره » .

٩ - **ابتكار الخطة** : تتجلى لنا خطة عندما نعرف ولو هيكلاً عاماً للعمليات الحسابية او الرسوم الهندسية التي يلزم اجراؤها من اجل الحصول على المجهول . وربما كان ما بين فهم المسألة وادراك خطة لحلها مسافة طويلة ملتوية . ولا شك ان القسم الرئيسي في الحل هو الوصول الى فكرة خطته . وقد يستبين ذلك تدريجياً او قد تسبقه محاولات تبدو فاشلة او فترة تردد ، ثم هو يتبدى فجأة كلمحة خاطفة او « فكرة نيرة » .

وافضل ما يستطيع المدرس ان يقدمه للطالب هو ان يحصل له على فكرة نيرة بدون اي اقحام ، والاسئلة والتوجيهات التي نناقشها هنا تستهدف هذا الأمر .

وكيما يستطيع المدرس ان يقدر موقف الطالب عليه ان يتذكر تجاربه هو نفسه وصعوباته وحوادث نجاحه في حل مسائله .

ومما لا شك فيه انه يتعذر الوصول الى فكرة جيدة اذا كانت معرفتنا للموضوع غير كافية، ويستحيل ذلك بدون معرفة. فالفكرة الجيدة تبنى على الخبرة السابقة والمعارف المكتسبة. والذاكرة وحدها لا تكفي لجلب هذه الفكرة ولكن لا يمكن الحصول عليها الا اذا استعدنا في الذهن بعض الحقائق المتعلقة بالموضوع؛ كتجميع مواد البناء فهذا وحده لا يكفي لانشاء البيت، بيد ان انشاءه لا يتم بدون المواد اللازمة . والمواد اللازمة لحل المسألة الرياضية هي حقائق تتعلق بها حصلنا عليها من معارف سبق ان تعلمناها او مسائل سبق ان حللناها او نظريات سبق ان برهنا عليها . ولذا فكثيراً ما يكون من المناسب أن نبدأ بالسؤال : هل تعرف مسألة ذات صلة بمسألتك .

والعقبة هنا اننا نجد عادة وفرة من مسائل لها بعض الصلة بالمسألة التي أمامنا، اي انها تشترك معها في نقطة ما . فكيف نختار منها مسألة او اكثر لها فائدة مضمونة ؟ هناك توجيه يضع ابصارنا على نقطة مشتركة رئيسية : انظر الى المجهول، وحاول ان تتذكر مسألة تعرفها فيها هذا المجهول او مجهول يشبهه.

فاذا نحن وفقنا الى استذكار مسألة سبق لنا حلها وهي ذات صلة وثيقة بمسألتنا فقد واتانا الحظ، ولكنه حظ ينبغي ان نجد لنستحقه، ونحن انما نستحقه اذا استطعنا ان نستغله . وهنا يأتي السؤال : هذه مسألة ذات صلة بمسألتك وقد حلت من قبل فهل يمكنك ان تستعملها ؟

والاسئلة السابقة اذا فهمت فهماً تاماً واخذت مأخذ جد فكثيراً ما تفضي الى تواتر الفكرات الصائبة . غير انها ليست مضمونة النتائج على الدوام، فما هي سحر ساحر يصنع الاعاجيب . وان هي لم توصلنا الى النتيجة المطلوبة لزم ان نعيد التفتيش عن رابطة اكثر ملاءمة وان نتفحص نواحي المسألة المختلفة، وقد نجد لزاماً ان نغير في المسألة او نبدل او نعدل . وهنا مكان السؤال : هل يمكنك تذكر المسألة بعبارة من عندك ؟ وبعض اسئلة الثبت تشير الى طرق محددة لتعديل المسألة كالتعميم والتخصيص والمقابلة وغض النظر عن جزء من الشرط وما الى ذلك، فان التفاصيل كلها هامة ولكن لا نستطيع الآن أن

نتناولها جميعاً . ثم ان تغيير المسألة قد يؤدي الى مسألة مساعدة مناسبة : اذا لم تستطع ان تحل المسألة فجرب ان تحل اولاً مسألة ذات صلة بها .

ونحن اذ نحاول ان نطبق مختلف المسائل والنظريات التي نعرفها وندخل ما نراه من تعديلات في المسألة المعطاة ونتلمس المسائل المساعدة قد نشط عن المسألة الاصلية حتى لتضيع علينا معالمها . ولكن في اسئلة الثبت ما يعيدها الى حظيرة تفكيرنا: هل استعملت كل المعطيات هل استعملت الشرط كله ؟

١٠ **مثال :** ولنعد الى المثال الذي بدأناه في القسم ٨ . لقد وقفنا حيث توصل الطلاب الى فهم المسألة وثار عندهم بعض الاهتمام بها . فلعل لديهم الآن فكرة من عندهم تجعل زمام المبادرة في ايديهم . فان كان المدرس وهو يرقبهم بدقة لم يلمح مثل هذا فعليه ان يستأنف حواره بعناية . ويجدر ان يكون على استعداد لأن يكرر الاسئلة التي يعجز عنها الطلاب ولكن معدلة مبسطة ، وليتوقع ان يجد الصمت جواباً في كثير من الاحيان (وهذا ما نشير اليه هنا بالنقط ...) .

« هل تعرفون مسألة ذات صلة بهذه ؟ »

« . . . . . . »

« انظروا الى المجهول . هل تعرفون مسألة فيها هذا المجهول ؟ »

« . . . . . . »

« حسنا . ما المجهول ؟ »

« قطر متوازي المستطيلات » .

« هل تعرفون اي مسألة فيها هذا المجهول ؟ »

« كلا . ما رأينا بعد مسألة عن قطر متوازي المستطيلات »

« هل تعرفون اي مسألة فيها مجهول يشبهه ؟ »

« . . . . . . »

« انتبهوا الي. ان القطر قطعة من خط مستقيم . ألم تحلوا مسألة كان المجهول فيها طول خط ؟ »

« طبعاً ، حللنا مسائل كهذه ، مثل ايجاد ضلع المثلث القائم » .

« احسنت . فهنا اذن مسألة ذات صلة بمسألتنا وقد حلت من قبل . فهل يمكن ان نستعملها ؟ »

« . . . . . . »

« لقد توفقتم في استذكار مسألة ذات صلة بالمسألة الحاضرة ، وقد حللتموها من قبل . افترون ان تستخدموها ؟ هل يمكن ان ندخل عنصراً جديداً مساعداً كي نستفيد من المسألة التي تذكرناها ؟ »

« . . . . . . »

« انظروا ، ان المسألة التي تذكرتموها تتعلق بمثلث ، فهل في هذا الشكل مثلث ؟ »

وهنا نأمل ان يكون هذا التلميح واضحاً وضوحاً يكفي لاستحضار فكرة الحل بطريقة المثلث القائم (وهو المظلل في شكل (١) الذي يكون القطر المطلوب وتراً له) . ولكن يجدر بالمدرس ان يتوقع ان يفشل حتى هذا التلميح الصريح نوعاً في ازاحة كابوس الخدر عن اذهان طلابه وعندها يجب ان يتسع صدره الى مزيد من

شكل ١

التلميحات المتزايدة في الصراحة . « اتريدون مثلثاً في الشكل ؟ » « ما نوع المثلث الذي تريدونه ؟ » « لا تعرفون بعد طريقة لايجاد القطر . ولكن تقولون انكم تستطيعون ان توجدوا ضلع المثلث ، فما العمل ؟ » « هل تستطيعون ايجاد القطر لو كان ضلعاً في مثلث ؟ »

فاذا ما توصل الطلبة ، بمساعدة المدرس، الى ادخال العنصر المساعد الحاسم، وهو المثلث القائم المظلل في شكل (١) ، فينبغي الا يتركهم يباشرون حسابات الحل الفعلية قبل ان يقتنع بانهم يدركون ما وراء هذه الخطوة .

« في رأيي انها كانت فكرة صائبة ان نرسم هذا المثلث ، وها قد حصلنا عليه . فهل حصلنا على المجهول ؟ »

« المجهول وتر المثلث ، ونستطيع ان نوجده بواسطة نظرية فيثاغورس » .

« تستطيعون اذا كان ضلعا المثلث معلومين ، فهل هما كذلك ؟ »

« أحدهما اعطي لنا وهو ج والثاني ، في ظني ، لا يصعب ايجاده . نعم ، ان الثاني وتر مثلث قائم آخر » .

« احسنت ، اذن فقط حصلت على خطة » .

١١ – **تنفيذ الخطة** : ان ابتكار الخطة ، اي ادراك فكرة الحل ، ليس بالامر السهل . فهو حتى يتم يستدعي المعلومات التي سبق اكتسابها ، والعادات الذهنية المجدية ، وتركيز الذهن على الهدف ، وشيئاً آخر هو الحظ . واما تنفيذ الخطة فأسهل بكثير اذ هو لا يتطلب الا الصبر .

فالخطة ترسم هيكلاً عاماً ويبقى علينا ان نرى ان التفاصيل لها مكانها في هذا الهيكل ، ولذا ينبغي تفحصها واحداً واحداً بصبر واناة حتى يتضح كل شيء ، ولا تبقى زاوية واحدة يكمن فيها الخطأ .

وعندما يدرك الطالب الخطة ادراكا صحيحاً ، يستطيع ان يتنفس الصعداء ولكن الخطر الاكبر ان ينسى الطالب تلك الخطة . وما اسهل ما يحدث هذا اذا كانت الخطة قد فرضت عليه من علٍ وقبلها ثقة منه باستاذه – اما اذا هو توصل اليها بنفسه ، مع مساعدة طبيعية من المدرس وادرك الفكرة النهائية حقاً ، واقتنع بها فليس من السهل ان ينساها . ومع ذلك يجدر بالمدرس ان يلح على الطالب ان يحقق كل خطوة يجريها .

وقد نقتنع بصحة خطوة ما من تفكيرنا اما اقتناعاً «حدسياً» أو « شكلياً» فقد نركز الذهن على الخطوة فتبدو لبصيرتنا بجلاء ووضوح يجعلنا نؤمن بصحتها او قد نستنتجها استنتاجاً حسب القواعد الشكلية . (والفارق بين « رؤية

الحقيقة » وبين «البرهان الشكلي» عليها واضح في كثير من الحالات الهامة فلندع التفاصيل للفلاسفة) .

والاساس ان يؤمن الطالب ايماناً صادقاً بصحة خطواته . ولكن يستحسن ان يكشف المدرس بين حين وحين عن الفرق بين « الاقتناع » و « البرهان » : أترى بوضوح ان الخطوة صحيحة ؟ هل يمكنك ايضاً ان تثبت صحتها ؟

١٢ – مثال : لنكمل المثال السابق من حيث وصلنا به في نهاية القسم ١٠ حيث تبدت للطالب فكرة الحل ورأى المثلث القائم الذي وتره هو المجهول س واحد ضلعيه الارتفاع المعطى جـ والضلع الآخر قطر في احد وجوه متوازي المستطيلات . وينبغي تشجيع الطالب على اقتباس الرموز المناسبة فيختار ص مثلاً لقطر الوجه الذي بعداه أ ، ب . وبذا تزداد فكرة الحل وضوحاً ، الا وهي الاستناد على مسألة مساعدة المجهول فيها ص . ثم هو يتناول المثلثين القائمين واحداً بعد الآخر (شكل ١) فيحصل على المعادلتين

$$\text{س}^{2} = \text{ص}^{2} + \text{جـ}^{2}$$
$$\text{ص}^{2} = \text{أ}^{2} + \text{ب}^{2}$$

وبحذف المجهول المساعد ص يحصل على :

$$\text{س}^{2} = \text{أ}^{2} + \text{ب}^{2} + \text{جـ}^{2}$$
$$\text{س} = \sqrt{\text{أ}^{2} + \text{ب}^{2} + \text{جـ}^{2}}$$

ولا داعي لأن يقاطع المدرس تلميذه وهو يسير في هذه الخطوات سيراً صحيحاً الا اذا شاء ان يتأكد ان الطالب يحقق كل خطوة يجريها فيمكن ان يسأله :

« أترى بوضوح ان المثلث الذي اضلاعه س ، ص ، جـ ، قائم ؟ »

وهنا قد يجيب الطالب باخلاص : «نعم» . ولكن تنتابه حيرة شديدة اذا لم يكتف المدرس بقناعته الحدسية فراح يسأله :

« أتستطيع ان تثبت انه قائم ؟ »

ولذا يستحسن ان يتغاضى المدرس عن هذا السؤال اذا لم يكن لدى الطلبة خبرة كافية في الهندسة الفراغية . حتى ولو كان لديهم هذه الخبرة فينبغي ان يحذر المدرس ان تصير الاجابة عن سؤال فرعي عارض هي المشكلة الرئيسية عند اكثر الطلاب .

١٣ – مراجعة الحل : حتى امهر الطلاب عندما يحصلون على الحل ويكتبون خطواته واضحة يميلون الى اقفال الكراسات والتطلع الى شيء جديد، وبذا يفقدون ناحية من أهم نواحي الحل واكثرها افادة . فهم اذا راجعوا الحل بعد ان يكتمل واعادوا النظر في النتيجة وتفحصوها وتمعنوا في الخطى التي ادت بهم الى هذه النتيجة تزداد معلوماتهم تركيزاً ويزدادون مقدرة على حل المسائل. والمدرس الناجح يعرف ويؤكد لطلابه ان ليس من مسألة يمكن ان يقال ان قد فرغ منها نهائياً ، فبعد حلها يبقى دائماً شيء يمكن ان يعمل ، فبالدراسة الكافية وامعان النظر قد يعدل الحل او قد يتوصل الى فهم اعمق .

والآن نفذ الطالب خطته وكتب حله وحقق خطواته ، فلديه ملء الحق في ان يعتبر ان حله صحيح . ورغم ذلك فالخطأ مجاله واسع لا سيما حيث ينطوي الحل على حجة طويلة مشعبة . ولذا فالتثبت امر مستحب لا سيما اذا تبدت طريقة حدسية سريعة تستطيع اختبار النتيجة او الحجة ، فعندها ينبغي ألا نتغاضى عن ذلك : أتستطيعون التثبت من النتيجة ؟ أتستطيعون التثبت من الحجة ؟

ونحن كي نقتنع بوجود شيء ما او بصفة معينة فيه نطلب ان نراه وان نلمسه. وكما نفضل الاحساس عن طريق حاستين مختلفتين كذلك نفضل الاقتناع عن طريق برهانين مختلفين : هل تستطيعون الحصول على النتيجة بطريقة اخرى ؟ والحجة القصيرة البديهية افضل لا شك من الحجة الطويلة المثقلة الاطراف : هل يمكنك ان تراها بلمحة ؟

ومن اول واجبات المدرس واهمها ألا يتيح لطلابه ان يعتقدوا بان المسائل الرياضية منفصل بعضها عن بعض ولا رابطة بينها وبين اي شيء آخر .

ولدينا فرصة طبيعية للنظر في ارتباطات المسألة بغيرها عند مراجعة حلها . والطلبة يجدون لذة كبيرة في المراجعة اذا هم بذلوا جهداً حقيقياً وشعروا بان ما عملوه كان صواباً . فحينئذ تبدو عندهم الرغبة في تلمس ما يمكن ان يستفيدوه من جهدهم هذا و كيف يمكن ان يكون عملهم صائباً في مرات اخرى. فليشجعهم المدرس على تخيل حالات يمكن ان يستغلوا بها طريقتهم او نتيجتهم : أيمكنكم استخدام النتيجة او الطريقة في حل مسائل اخرى ؟

١٤ – مثال : في القسم **١٢** توصل الطلاب الى هذه النتيجة : في متوازي المستطيلات اذا كانت الاحرف الثلاثة التي تلتقي عند ركن واحد اطوالها أ ، ب ، جـ ، كان قطره يساوي :

$$\sqrt{أ^{٢} + ب^{٢} + جـ^{٢}}$$

أيمكن تحقيق هذه النتيجة ؟ ولا يجوز للمدرس ان يتوقع جواباً مرضياً عن هذا السؤال من طلاب خبرتهم ضئيلة . ولكن ينبغي ان يدرك الطلاب من وقت مبكر ان المسائل التي تنطوي على رموز تمتاز عن المسائل العددية الخالصة في ان نتيجة المسألة الرمزية تصمد لاختبارات عدة لا تصمد لها النتيجة العددية . ومثالنا ، على بساطته ، يكفي لتبيان ذلك . فالمدرس يجد حول النتيجة اسئلة عديدة سرعان ما يجيب عنها الطلاب « بنعم » ، اما « لا » فجواب قد ينم عن خلل جدي في النتيجة .

« هل استعملتم كل المعطيات ؟ هـــل تظهر المعطيات أ ، ب ، جـ ، كلها في القانون الذي حصلتم عليه للقطر ؟ »

« الطول والعرض والارتفاع تلعب دوراً واحداً في هذه المسألة ، فالمسألة اذن متماثلة من حيث الطول والعرض والارتفاع . فهل العبارة الجبرية التي حصلنا

عليها للقطر متماثلة من حيث أ ، ب ، جـ ؟ هـل تبقى بلا تغير اذا استبدلنا أ ، ب ، جـ ، بعضها ببعض ؟ »

« مسألتنا مسألة في الهندسة الفراغية : ايجـاد قطر متوازي المستطيلات الذي ابعاده أ ب ، جـ . وهي تقابل مسألة في الهندسة المستوية هي ايجاد قطر مستطيل بعداه أ ، ب . فهل النتيجـة التي حصلنا عليها في مسألة الهندسة الفراغية على قياس نتيجة مسألة الهندسة المستوية ؟ »

« اذا تناقص الارتفاع جـ حتى تلاشى نهائياً يصـير متوازي المستطيلات مستطيلاً ، فاذا جعلتم جـ = صفراً في القانون فهل ينتج القانون لقطر المستطيل ؟ »

« اذا تزايد الارتفاع جـ تزايد القطر فهل قانونكم يؤيد ذلك ؟ »

« اذا تزايدت الابعاد أ ، ب ، جـ على نسبة واحدة يتزايد القطر على النسبة ذاتها . ففي قانونكم اذا وضعتم ١٢ أ ، ١٢ ب ، ١٢ جـ ، بدل أ ، ب ، جـ ، على التوالي فطول القطر يلزم ان يتضاعف ١٢ مرة . فهل يؤيد القانون ذلك ؟ »

« اذا قيست أ ، ب ، جـ بالاقـدام كان القطر بالاقدام فاذا حولتم جميع الاطوال الى بوصات لا يختل القانون . فهل هذا صحيح ؟ »

(السؤالان الاخيران متكافئان في الجوهر ؛ راجع مادة « الاختبار بالابعاد » في القاموس) .

وتترك هذه الاسئلة عدة اثار طيبة ، اولها ان الطالب النبيه لا يملك الا ان يعجب لهذا القانون الذي يصمد لكل هذه الاختبارات . فهو قد اقتنع من قبل بأن القانون صحيح لأنه بذل كل عناية في استنتاجه ؛ وهو الآن قد ازداد ثقـة فيه ، وازدياد ثقته أتى عن طريق آخر : طريق « الدليل التجريبي » . وبفضل هذه الاسئلة تتجلى لعناصر القانون قيم جديدة وتترابط به حقائق كثيرة . فهو من اجل ذلك قد يزداد رسوخاً في الذاكرة ومعرفـة الطالب تزداد تكاتفاً . واخيراً ان هذه الاسئلة يسهل استعمالها في مسائل مماثلة ، وبدراسة هذه المسائل المماثلة قد يدرك الطالب النبيه الافكار العامة الاساسية : استعمال كل المعطيات ،

وتغييرها والتماثل والقياس . واذا هو جعل من عادته أن ينتبه الى مثـــل هذه الامور فمقدرته على حل المسائل تزداد بالتأكيد .

هل يمكنك ان تحقق طريقتك ؟ ان تحقيق الطريقة خطوة خطوة قد يلزم في المسائل الصعبة والهامة . وفيما عدا ذلك يكفي مراجعة الخطوات الدقيقـة . ففي حالتنا هذه قد يكفي ان نعود الى مناقشة السؤال الذي تجنبناه قبــل الوصول الى الحل : أتستطيع ان تبرهن على ان المثلث الذي اضلاعه س ، ص ، ج قائم ؟ (انظر نهاية القسم ١٢) .

هل يمكنك ان تستفيد من هذه النتيجة او الطريقة في حل مسألة اخرى ؟ مع شيء من التشجيع ، وبعد مثال او مثالين ، يصبح من السهل على الطالب ان يجد تطبيقات تنطوي في جوهرها على تفسير ملموس للعناصر الرياضية المجردة في المسألة . ومثل هذا التفسير الملموس لجأ اليه المدرس نفسه عندما حول المسألة من متوازي المستطيلات الى حجرة الدرس . إن الطالب الذي يقترح كاحدى التطبيقات ايجاد قطر قاعـة الطعام بدل حجرة الدرس طالب محدود الذكاء . فاذا لم يبتكر الطلاب مسائل اكثر لماعية فقد يرى المدرس ان يثير هو مسألة جديدة مثل : « اوجد البعد بين مركز متوازي المستطيلات وأحد اركانه اذا اعطيت طوله وعرضه وارتفاعه » .

وهنا يستطيع الطلاب إن يستخدموا نتيجة المسألة السابقة اذا هم لاحظوا ان البـــعد المطلوب هو نصف القطر الذي اوجدوه ، او هم يستطيعون ان يستخدموا طريقتها ببحث مثلثات قائمة مناسبة (والاختيار الثاني اقل خطوراً على البال واقل رشاقة في مسألتنا الحاضرة) .

بعد هذا يستطيع المدرس ان يناقش اوضاع الاقطار الاربعـــة لمتوازي المستطيلات والاهرام الستة التي تكون قواعدها وجوه المتوازي ورؤوسها في مركزه واحرفها انصاف اقطاره . فاذ نشط خيال الطلاب الهندسي امكن المدرس ان يعود الى سؤاله السابق : هـــل يمكنكم ان تستفيدوا من النتيجة او

الطريقة في حل مسألة اخرى ؟ وهنا يكون الطلاب اكثر توفيقاً في ايجاد امثلة ملموسة جديدة كهذا :

« يراد اقامة علم ارتفاعه ٨ ياردات في منتصف سطح عمارة . فاذا كان السطح مستطيل الشكل طوله ٢١ ياردة وعرضه ١٦ وجعلنا قطب العلم ممسوكاً باربعة حبال تبدأ من نقطة تحت رأسه بياردتين وينتهي كل منها عند ركن من اركان السطح ، فما طول كل من هذه الحبال ؟ »

وهنا يستطيع الطلاب ان يستخدموا طريقة المسألة التي سبق حلها فيتخذوا مثلثين قائمين احدهما في مستوى رأسي والآخر في مستوى افقي أو هم يستطيعون ان يستخدموا نتيجة المسألة بتخيل متوازي مستطيلات قطره س احد الحبال واحرفه أ = ١٠و٥ ، ب = ٨ ، جـ = ٦ ، وبالتعويض المباشر في القانون ينتج ان س = ١٤و٥ .

ولمزيد من الاسئلة انظر المادة : هل يمكنك ان تستعمل النتيجة ؟ في القاموس .

١٥ – **تنوع المجابهة :** لنتوقف مرة اخرى عند المثال الذي ناقشناه في الاقسام ٨ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٤ وقد جاء العمل الرئيسي ، اي اكتشاف الخطة ، في القسم ١٠ ، ولنلاحظ انه كان بامكان المدرس ان ينهج مسلكاً مختلفاً مبتدئاً من نفس النقطة كما في القسم ١٠ وسائلا الاسئلة التالية :

« اتعرفون مسألة ذات صلة بهذه ؟ »

« اتعوفون مسألة مماثلة ؟ »

« لاحظوا ان مسألتنا من الهندسة المجسمة . أفيمكن ان تتخيلوا مسألة أبسط وعلى قياسها من مسائل الهندسة المستوية ؟ »

« مسألتنا تتعلق بشكل في الفراغ ، بقطر متوازي المستطيلات . فأي مسألة تقابلها عن شكل في السطح المستوي ؟ يلزم ان تتعلق المسألة بقطر ... قطر ماذا ؟ »

« قطر مستطيل » .

فها هم الطلبة مهما كانوا يعانون من بطء التفكير وقلة الاهتمام قد استطاعوا ان يضيفوا شيئاً ولو قليلاً الى الفكرة . ثم اذا هم كانوا حقاً بهذا البطء فلا ينبغي ان يشرعوا بمسألة متوازي المستطيلات قبل بحث المسألة السهلة المقابلة ، مسألة المستطيل على سبيل التمهيد لهم . وعندها قد تجري الأسئلة على مثل هذا الشكل :

« هذه مسألة ذات صلة بمسألتكم وقد حلت من قبل ، فهل يمكنكم ان تستعملوها ؟ »

« أينبغي ادخال عنصر مساعد كي يصبح استعمالها ممكناً ؟ »

واخيراً قد يوفق المدرس الى استدراج الطلاب للفكرة المطلوبة وهي رؤيتهم ان قطر متوازي المستطيلات هو قطر لمتوازي اضلاع مناسب يجب اظهاره في الشكل (مقطع متوازي المستطيلات بالمستوى الذي يمر بحرفين متقابلين فيه) . والفكرة هي في جوهرها نفس ما رأينا في القسم ١٠ ولكن نوع المجابهة جديد . ففي القسم ١٠ استثرنا معرفة الطلاب السابقة مبتدئين بالمجهول فجئنا بمسألة سبق حلها اخترناها لان المجهول فيها ذات المجهول في المسألة الحاضرة . اما هنا فقد جعلنا القياس سبيلا للوصول الى فكرة الحل .

١٦ – طريقة المدرس في مداولة الاسئلة : ان الطريقة التي رأيناها في الاقسام ٨ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٤ ، ١٥ هي في جوهرها كما يلي : إبدأ بسؤال او توجيه عام من الثبت ، ثم اذا لزم الأمر انحدر منه الى اسئلة او توجيهات مخصصة وملموسة ، حتى تصل الى ما يجد رجعاً في ذهن الطالب . واذا لزم ان تساعد الطالب على استغلال فكرته ، ابدأ اذا امكن مرة اخرى من سؤال او توجيه عام في الثبت وتدرج منه الى واحد اكثر تخصيصاً اذا لزم الامر . وهكذا دواليك .

وغني عن البيان ان ثبتنا هو اول ثبت من نوعه ، وهو يبدو كافياً في معظم الحالات البسيطة ، ولكنه بالتأكيد غير كامل . بيد ان من المهم على كل حال ان

تكون التوجيهات التي منها نبدأ بسيطة طبيعية عامة وان يكون الثبت الذي يضمها قصيراً .

فهي يجب ان تكون بسيطة وطبيعية حتى لا تكون مقحمة اقحاماً .

وهي يجب ان تكون عامة حتى لا ينحصر تطبيقها في المسألة الحاضرة بل يعم كل المسائل التي من نوعها اذا اريد منها تنمية ملكة الطالب لا تعليمه نهجاً خاصاً فحسب .

وينبغي ان يكون الثبت قصيراً كي يسهل تكرار الاسئلة بلا تكلف وفي شتى الظروف ، وهذا يتيح للطالب ان يتفهمها فتساعده في اكتساب عادة ذهنية .

وينبغي الانحدار تدريجياً الى التوجيهات المحدودة كي يساهم الطالب في الحل الى اقصى حد .

وهذه الطريقة في السؤال مرنة متفتحة . وهذا امر مرغوب فيه ، ففي مثل هذه الامور لا شك ان الطريقة الجامدة الآلية الرتيبة شيء رديء . فطريقتنا فيها مرونة وقابلية للتكييف وهي تفسح المجال لتنوع في مجابهة المسائل (القسم ١٥) وهي يمكن ، بل يلزم ان تجري بحيث تكون الاسئلة التي يثيرها المدرس مما قد يكون سنح للطالب اختبارها بنفسه .

واذا اراد القارىء ان يجرب هذه الطريقة في فصله فعليه ان يسير بحذر: عليه ان يدرس بدقة تامة المثال المبين في القسم ٨ ، والامثلة التي تتلو في الاقسام ١٨ ١٩ ، ٢٠ ثم يُعدّ بعناية الامثلة التي يريد مناقشتها ويأخذ بعين الاعتبار شتى طرق المجابهة . وهو يحتاج بادىء الامر الى تجارب قليلة ينظر معها كيف يتدرج في استخدام الطريقة وكيف يستقبلها طلابه وكم تستغرق من الزمن .

١٧ – الاسئلة الجيدة والاسئلة الرديئة : فاذا فهمت الطريقة التي بيناها لمداولة الاسئلة فهما جيداً يسهل بعدها ان نحكم بالمقارنة على صلاحية ما يلقى

من الاسئلة قصد مساعدة الطلاب .

فلنراجع موقفنا كما بدا في اول القسم ١٠ حيث القي السؤال : هـل تعرف مسألة ذات صلة بها ؟

قد يستعيض مدرس عن هذا السؤال بسؤال آخر يلقيـه مخلصاً في قصده : « ايمكنك ان تطبق نظرية فيثاغورس ؟ »

وقد يكون مقصد المدرس خير المقاصد ولكن السؤال من اسوأ الاسئلة . واذا نحن راجعنا المناسبة التي اعطي فيها تبين لنا سلسلة طويلة من الاعتراضات عليه على مثل هذه « المساعدة » .

(١) اذا كان الطالب قد قارب الحل فقد يستطيع ان يفهم معنى الاقتراح الذي يتضمنه السؤال ، اما قبل ان يقارب الحل فمن المرجح انه لن يدرك مرمى السؤال ، وهكذا يفشل المدرس في مساعدة الطالب حيث يكون الطالب في أمس الحاجة الى المساعدة .

(٢) اذا فهم الاقتراح انكشف السر كله ولم يبق للطالب ما يعمله .

(٣) الاقتراح ضيق محدود واذا استطاع به الطالب ان يحل المسألة الحاضرة فهو لن يفيد شيئاً في حل مسائل اخرى فالسؤال اذن لا فائدة تعليمية له .

(٤) حتى لو فهم الطالب الاقتراح فهو يندر ان يرى كيف توصل المدرس اليه . فكيف يستطيع ، هو الطالب ، ان يبتكر اقتراحاً مثله بنفسه ؟ انــه يأتيه مفاجئاً كسحر ساحر يرفع القبعة فيطل من تحتها الارنب . انه حقاً سؤال لا فائدة تعليمية له .

وما من واحد من هذه الاعتراضات يمكن اقامته ضد النهج الذي سقناه في القسم ١٠ أو القسم ١٥ .

أمثلة أخرى

١٨ – مسألة في الانشاء : انشىء مربعاً داخل مثلث معلوم بحيث يقــع

ركنان من اركانه على قاعدة المثلث ويقع كل من الركنين الآخرين على ضلـــع من ضلعي المثلث الاخرين .

« ما المجهول ؟ »

« المربـــع » .

« ما المعطيات ؟ »

« مثلث ولا شيء غيره » .

« ما الشرط ؟ »

« اركان المربـع الأربعة على محيط المثلث : اثنان على القاعدة ، وعلى كل من الضلعين الآخرين ركن » .

« هل يمكن ان يتحقق الشرط ؟ »

« اظن ذلك . ولكني غير متأكد » .

« يبدو انك تجد المسألة صعبة . فاذا كنت لا تستطيع حلها فجرب ان تحل مسألة ذات صلة بها » .

« هل يمكن ان يتحقق بعض الشرط ؟ »

« ماذا تعني ببعض الشرط ؟ »

« الشرط يشمل اركان المربـع . فكم ركناً له ؟ »

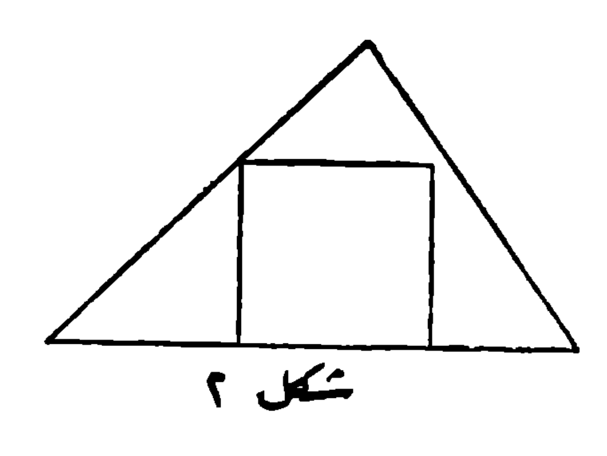
« اربعة » .

« فبعض الشرط اذن يتعلق باقل من اربعة اركان . خذ جزءاً من الشرط فقط ، واهمل البـــاقي ، اي جزء من الشرط يسهل ان يتحقق ؟ »

« يسهل رسم مربـع ركنان فيه على المحيط ، لا بل ثلاثة ! »

« ارسم شكلا » .

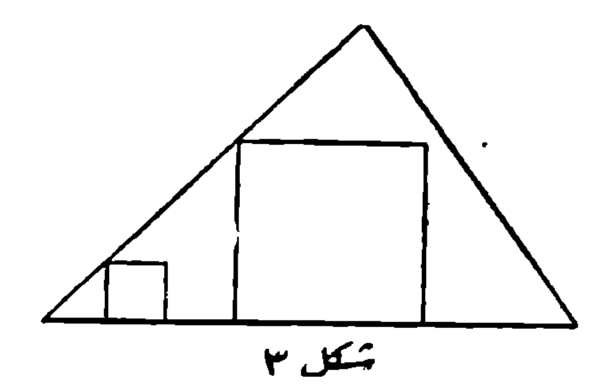
يرسم الطالب الشكل (٢).



شكل ٢

« احتفظت ببعض الشرط وتغاضيت عن الباقي فالى أي حد تعين الآن المجهول ؟ » .

« لا يتعين المربع اذا كان ثلاثة من اركانه فقط على محيط المثلث » .



شكل ٣

« حسناً ، بين ذلك بشكل » .

يرسم الطالب الشكل (٣) .

« قلت ان المربع لا يتعين بالجزء الذي اخذته من الشرط ، فكيف يتغير ؟ »

« .... »

« ثلاثة من اركان المربع على محيط المثلث والركن الرابع ليس على المحيط ، حيث يجب ان يكون . والمربع كما قلت لم يتعين فهو متغير . وركنه الرابع ايضاً متغير : فكيف يتغير ؟ »

« .... »

« جرّب عملياً اذا شئت . ارسم بضعة مربعات كالذين امامك ، ثلاثة من اركانها على محيط المثلث . اجعل بعضها صغيراً وبعضها كبيراً . ما المحل الهندسي للركن الرابع ؟ كيف يتغير ؟ »

لقد جعل المدرس تلميذه يشارف فكرة الحل . فاذا هو استطاع ان يقدر ان المحل الهندسي للركن الرابع خط مستقيم فقد ادرك الفكرة .

١٩ – مسألة للبرهنة : زاويتان في مستويين مختلفين واضلاعهما المتناظرة متوازية ومتحدة في الاتجاه . برهن على ان الزاويتين متساويتان .

هذه نظرية اساسية في الهندسة الفراغية . وهي يمكن ان تعطى الى طلاب يعرفون الهندسة المستوية ويعرفون من الهندسة الفراغية الحقائق القليلة التي تمهد الى هذه النظرية في كتاب اقليدس (هذه هي النظرية ١٠ في كتاب اقليدس الجزء ١١) . هنا نضع خطاً تحت كل سؤال مقتبس من الثبت وكذلك خطاً تحت

كل سؤال يناظره مناظرة « مسائل الاثبات » « لمسائل الايجاد » . (وهـــذا التناظر مشروح في المادة : مسائل الايجاد ومسائل الاثبات ٥ و ٦ في القاموس).

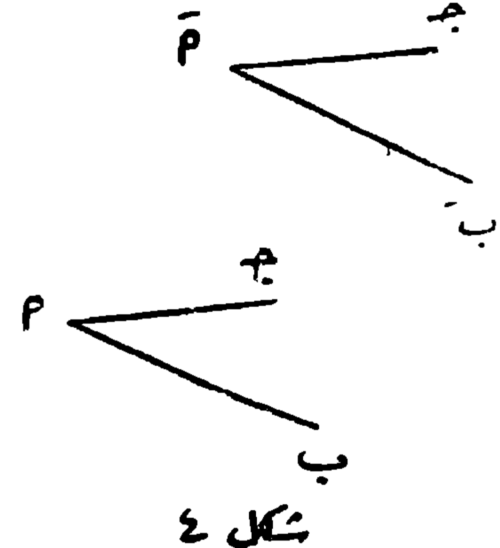
« ما المفروض ؟ »

« زاويتان في مستويين مختلفين وكل ضلع في احداهما يوازي نظيره في الاخرى ويشاركه في الاتجاه » .

« ما المطلوب ؟ »

« ان الزاويتين متساويتان » .

« ارسم شكلاً وضع الرموز المناسبة » .



شكل ٤

يرسم الطالب الشكل (٤) ويضع بمساعدة المدرس الاحرف المبينة فيه .

« ما المفروض ؟ اذكره من فضلك مستعملا رموزك » .

« أ ، ب ، جـ ، ليست في مستوى أَ ، بَ ، جَ ؛ أ ب // أَ بَ ، أ جـ // أَ جَ ، وكذلك أ ب في نفس اتجاه أَ بَ ، أ جـ في نفس اتجاه أَ جَ .

« ما المطلوب ؟ »

« زاوية ب أ جـ = زاوية بَ أَ جَ » .

« انظر الى المطلوب وحاول ان تتذكر نظرية تعرفها فيها نفس المطلوب او ما يشبهه » .

« اذا تطابق مثلثان كانت الزوايا المتناظرة متساوية » .

« حسناً جداً . هذه نظرية ذات صلة بنظريتنا ، وقد برهنا عليها من قبل ، فهل يمكن استخدامها ؟ »

« ربما ، ولكني لا اعرف بعد كيف افعل ذلك » .

« اينبغي عليك ان تدخل عنصراً مساعداً لتجعل استخدامها ممكناً ؟ » .

« . . . . . . »

« لابأس . النظرية التي ذكرتها تتعلق بمثلثين متطابقين ، فهل في الشكل الذي عندك اي مثلثات؟ »

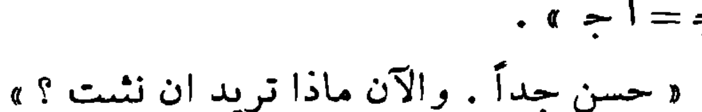
« كلا . ولكن يمكن ان نصل ب ج ، بَ جَ فيحدث المثلثان أ ب ج ، أ بَ جَ » .

« حسن جداً . ولكن بماذا يفيدنا هذان المثلثان ؟ »

« في اثبات المطلوب اي ان زاوية ب أ ج = زاوية بَ أ جَ » .

« حسن . ولاثبات ذلك كيف يجب ان يكون المثلثان ؟ »

« متطابقين . ولذا نأخذ ب ، ج ، بَ ، جَ ، بحيث يكون أ ب = أ بَ ، أ ج = أ جَ » .



شكل ٥

« حسن جداً . والآن ماذا تريد ان نثبت ؟ »

« ان المثلثين متطابقان ، المثلث أ ب ج = المثلث أ بَ جَ . فاذا ثبت ذلك ينتج المطلوب وهو ان الزاوية ب أ ج = الزاوية بَ أ جَ » .

« لطيف . اذن امامنا الآن هدف جديد . نريد ان نبرهن على شيء جديد . انظر الى المطلوب وحاول ان تتذكر نظرية تعرفها فيها هذا المطلوب او ما يشبهه . »

« يتطابق المثلثان اذا ... اذا كانت الاضلاع الثلاثة في احدهما تساوي الاضلاع الثلاثة في الآخر كل لنظيره » .

« حسن . كان يمكن ان تختار ما هو أسوأ من ذلك . والآن هذه نظرية

ترتبط بمسألتنا وقد برهنا عليها من قبل ، فهل يمكنك استخدامها ؟ »

« يمكن ان استخدمها لو عرفت ان ب ج = بَ جَ » .

« هذا صحيح . اذن فما هدفك الآن ؟ »

« ان اثبت ان ب ج = بَ جَ » .

« فكر في نظرية تعرفها فيها هذا المطلوب او ما يشبهه » .

« نعم . اعرف نظرية تنتهي بالقول : « فالخطان متساويان » ولكنها لا تفيدنا هنا » .

« هل يلزمك عنصر مساعد يجعل استخدامها ممكناً ؟ »

« . . . . . . »

« أرأيت ؟ كيف يمكن ان تثبت ان ب ج = بَ جَ ولا رابط بينهما في الشكل ؟ »

« . . . . . . »

« هل استعملت المفروض ؟ ما المفروض ؟ »

« فرضنا ان أ ب // أ بَ ، وان أ ج // أ جَ . نعم ، طبعاً ، يجب ان استعمل هذه المعلومات » .

« هل هذا كل المفروض ؟ تقول أ ب // أ بَ فهل هذا كل ما تعرفه عنهما ؟ »

« كلا . أ ب = أ بَ بالعمل . فهما متساويان ومتوازيان . وكذلك أ ج و أجَ » .

« مستقيمان متساويان ومتوازيان . شكل جميل . هل رأيته من قبل ؟ »

« طبعاً . انه متوازي الاضلاع . لنصل أ أَ ، ب بَ ، ج جَ » .

« فكرة لا بأس بها . كم متوازي اضلاع عندك ؟ »

« اثنان ، ثلاثة ، لا بل اثنان . اعني ان لدينا اثنين يمكن ان نثبت في الحال

انهما متوازيا الاضلاع وثالث يبدو انــه كذلك . اظن اني استطيع ان اثبت ذلك ، ثم ينتج المطلوب ! »

ربما كان القارىء قد استنتج من قبل اننا امام طالب ذكي ، ولكن الجواب الاخير لا يدع مجالاً للشك في امره . انــه طالب يستطيع ان يقدر الحقائق الرياضية ويميز تمييزاً واضحاً بين البرهان والتقدير . وهو يرى ايضاً ان تقديراته قد تكون معقولة . فهو لا شك طالب قــد افاد شيئاً من دروس الرياضيات وحصل على خبرة حقيقية في حل المسائل فهو يستطيع ان يدرك الفكرة الجيدة ويحسن استخدامها .

٢٠ مسألة في السرعة : يجري الماء الى وعاء مخروطي الشكل بسرعة س . والوعاء على شكل مخروط دائري قائم قاعدتــه افقية ورأسه الى اسفل . فاذا كان نصف قطر القاعدة او ارتفاع المخروط ب فما سرعة ارتفاع الماء في المخروط عندما يكون عمقه ص ؟ وما القيمة الرقمية للمجهول عندما يكون أ = ٤ أقدام و ب = ٣ اقدام و س = ٢ قدم ٣/ الدقيقة و ص = قدم واحد .

نفترض ان الطلاب يعرفون ابسط مبادىء التفاضل وفكرة سرعة التغير .

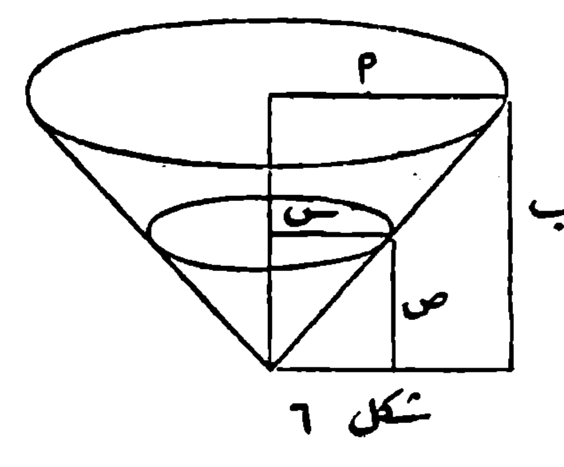
« ما المعطيات ؟ »

« نصف قطر قاعدة المخروط أ = ٤ اقدام وارتفاعه ب = ٣ اقدام وسرعة الماء الذي ينسكب فيه س = ٢ قدم ٣/ الدقيقة وعمقــه في لحظة ما ص = قدم واحد » .

« صحيح . ولكن نص السؤال يقترح التغاضي في البدء عن القيم الرقميــة ونعمل بالرموز فنعبر عن المجهول بدلالة أ ، ب ، س ، ص . ثم بعد ذلك ، اي بعــد ان نحصل على تعبــير جبري للمجهول ، نعوض القيم الرقمية .

فلنعمــل بهــذا الاقتــراح . ما المجهول » .

« سرعــة ارتفاع الماء عندما يكون عمقه ص » .



شكل ٦

« ما معنى ذلك ؟ هل يمكن التعبير عنه بشكل آخر ؟ »

« السرعة التي بها يتزايد عمق الماء » .

وما معنى هذا ؟ هل يمكن التعبير عنه بشكل آخر جديد ؟ »

« سرعة تغير العمق » .

« هذا صحيح . سرعة تغير ص . وما هي سرعة التغير ؟ ارجع الى التعريف » .

« التفاضل هو سرعة تغير الدالة » .

« صح . والآن هل ص دالة ؟ قلنا ان علينا ان نتغاضى عن قيمة ص الرقمية . فهل ترون ان ص متغيرة ؟ »

« نعم ان عمق الماء ص يتزايد مع الزمن » .

« اذن ص دالة لأي متغيرة ؟ » .

« للزمن ن ؟ »

« جيد : لنضع الرموز المناسبة . كيف ترمز الى سرعة تغير ص بالرموز الرياضية ؟ »

$$« \frac{د\,ص}{د\,ن} »$$

« جيد . فهذا هو المجهول والمطلوب ان نعبر عنه بالرموز أ ، ب ، س ، ص . وبهذه المناسبة احد هذه الرموز سرعة . فما هو ؟ »

« س هي سرعة انسكاب الماء في الاناء » .

« ما هذا ؟ أيمكن التعبير عنه بصورة اخرى ؟ »

« س هي سرعة تزايد حجم الماء في الاناء » .

« وما هذا ؟ أيمكن التعبير عنه بصورة اخرى جديدة ؟ كيف نكتبه بالرموز المناسبة ؟ »

$$« س = \frac{د\,ج}{د\,ن} »$$

« وما هي ج ؟ »

« حجم الماء عندما يكون الزمن ن » .

« جيد ، فالمطلوب اذن ان تعبر عن $\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$ بدلالة أ ، ب ، $\frac{\text{د ج}}{\text{د ن}}$ ، ص ، فكيف يكون ذلك ؟ »

« . . . . . . »

« اذا لم نستطع حل هذه المسألة فلنجرب حل مسألة ترتبط بها . ان لم تتبين الصلة بين $\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$ والمعطيات فلنجرب الحصول على صلة ابسط نتكىء عليها في سبيلنا الى المطلوب » .

« . . . . . . »

« أليست هنـــاك صلات اخرى ؟ مثلاً : هل ج و ص مستقل كل منهما عن الآخر ؟ »

« كلا ، اذا زاد ص يزيد ج ايضاً » .

« اذن فهناك صلة . ما هي ؟ »

« ج حجم مخروط ارتفاعه ص . ولكن لا نعرف بعد نصف قطر قاعدته ».

« ولكن يمكن ان نعتبره على كل حال . لنعطه اسماً . سمّه س » .

« $\text{ج} = \frac{\text{ط س}^2 \text{ ص}}{3}$ » .

« صح . والآن ماذا تقول عن س ؟ هل هي مستقلة عن ص ؟ »

« كلا . اذا زاد العمق ص يزيد نصف القطر س » .

« اذن فبينهما صلة . ما هي ؟ »

« طبعاً مثلثان متشابهان . س : ص = أ : ب » .

« رابطة جديدة كما ترون . لن اتردد في الاستفادة منها . تذكر انك كنت تريد الرابطة بين ج و ص » .

« عندي : $س = \frac{أ ص}{ب}$

$ج = \frac{ط أ^{٢} ص^{٣}}{٣ ب^{٢}}$ » .

« جيد جداً هذه تكأة مفيـــدة . أليس كذلك ؟ ولكن يجب الا ننسى الهدف . فما المجهول ؟ »

« $\frac{د ص}{د ن}$ » .

« اذن فعلينا ان نجد العلاقة بـين $\frac{د ص}{د ن}$ و $\frac{د ج}{د ن}$ ورموز اخرى . وامامنا الآن علاقة بين ص ، ج ورموز اخرى فما العمل ؟ »

« نفاضل طبعاً : $\frac{د ج}{د ن} = \frac{ط أ^{٢} ص^{٢}}{ب^{٢}} \times \frac{د ص}{د ن}$. هذه هي العلاقة » .

« جميل وماذا عن القيم الرقمية ؟ »

« اذا كان أ = ٤ و ب = ٣ و $\frac{د ج}{د ن}$ = س = ٢ و ص = ١

فان $٢ = \frac{ط \times ١٦ \times ١}{٩} \times \frac{د ص}{د ن}$ »

٢ طريقة الحل

محاورة

التعرف على المسألة

من أين أبدأ ؟ إبدأ من نص المسألة .

ماذا اعمل ؟ تخيل المسألة بأوضح وأجلى ما تستطيع . خذها كمجموعة عامة ولا تهتم الآن بالتفاصيل .

وماذا يفيدني ذلك ؟ يجب ان تفهم المسألة وتألفها وينطبع مرماها في ذهنك . ثم انت اذ تنعم النظر فيها قد تنشط ذهنك وتهيئه لاستعادة ما يتعلق بها من حقائق .

العمل من أجل فهم أعمق

من أين ابدأ ؟ إبدأ ايضاً من نص المسألة . إبدأ عندما يتضح هذا النص لديك وينطبع في ذهنك بحيث لا يمكن ان تنساه ولو انشغلت عنه الى حين .

ماذا أعمل ؟ افصل الاجزاء الرئيسية في المسألة بعضها عن بعض . ففي « مسائل الاثبات » يكون المفروض والمطلوب هما الجزأين الرئيسيين ، « وفي مسائل الايجاد » يكون المجهول والمعطيات والشرط هي الاجزاء الرئيسية . راجع

الاجزاء الرئيسية في المسأله واحداً واحداً ، خذها فرادى ، وخذها في مجموعات متباينة ، واربط تفاصيلها بعضها ببعض واربط كلاً منها بالمسألة .

وماذا يفيدني ذلك ؟ يجب ان تهيىء وتجلو التفاصيل التي قد تلعب دورها فيما بعد في الحل .

البحث عن فكرة نافعة

من اين ابدأ ؟ ابدأ بالنظر في اجزاء المسألة الرئيسية . ابدأ حينما تكون قد رتبت هذه الاجزاء بوضوح واستوعبتها في ذهنك بوضوح بفضل ما سبق ان صنعت وصارت ذاكرتك مهيأة للاستجابة .

ماذا أعمل ؟ قلّب المسألة من وجوه عدة ، وفتش عن ارتباطات بينها وبين معلوماتك السابقة .

قلّب المسألة من وجوه عدة : سلط الاضواء على اجزائها المتباينة . تفحّص تفاصيلها المختلفة .

تفحّص هذه التفاصيل كرة بعد كرة من نواحي شتى . ضمها في مجموعات شتى . هاجمها من اتجاهات شتى . حاول ان تفتش عن معنى جديد في كل واحد من التفاصيل وتفسير جديد لهذه التفاصيل كمجموعة . فتش عن ارتباطات بين المسألة وبين معلوماتك السابقة : حاول ان تتذكر ما الذي ساعدك في مثل هذا الموقف في الماضي . حاول ان تتعرف على شيء مألوف عندك فيما تتفحصه ، وحاول ان تجد شيئاً يفيدك فيما تتعرف عليه .

ماذا يمكن أن ادرك ؟ فكرة نافعة ، بل ربما فكرة حاسمة تريك بنظرة خاطفة الطريق الى النهاية .

كيف تكون الفكرة نافعة ؟ انها تريك الطريق او بعضه . انها توحي اليك

بوضوح كثير او قليل كيف تسير . والفكرات تتفاوت كمالاً ونقصاً . ولكن ان انت عثرت على فكرة اياً كانت فانت على كل حال سعيد الحظ .

ماذا اعمل بالفكرة الناقصة ؟ تنظر فيها فان رأيتها مضمونة الفائدة وجب ان تسير الى حيث تقودك . وهناك راجع موقفك مرة اخرى فانت الآن بفضل هذه الفكرة في موقف جديد . انظر في هذا الموقف الجديد من جهات مختلفة وفتش عن ارتباطات بمعارفك السابقة .

وماذا يفيدني تكرار النظر والتفتيش ؟ قد يقودك الحظ الى فكرة جديدة . وقد تقودك الفكرة الجديدة الى الحل او قد تحتاج الى بضع فكرات اخرى . وقد تشط بك فكرة فيبتعد بك عن قصدك ومع ذلك ينبغي ان تسعد بالفكرات الجديدة ، حتى الطفيفة منها ، حتى الشاحبة ، حتى الاضافية التي تضفي نوراً على الشاحبة او ترفع من شأن الطفيفة . بل حتى اذا انت لم تعثر الى حين على فكرة جديدة ذات قيمة فلتسعد اذا كان ادراكك للمسألة قد زاد اكتمالاً او زاد تماسكاً او زاد تجانساً او توازناً .

تنفيذ الخطة

من اين ابدأ ؟ ابدأ من الفكرة السعيدة التي قادتك الى الحل . ابدأ حينما تشعر انك اوثقت القبض على الرابطة الرئيسية وتثق انك تستطيع ان تستجلب التفاصيل الثانوية التي قد تلزم .

ماذا اعمل؟ زد قبضتك وثوقاً واعمل بالتفصيل كل العمليات الجبرية والهندسية التي سبق ان رأيتها ممكنة . واقنع نفسك بصحة كل خطوة بالتفكير الشكلي او بالبداهة او بكليهما اذا استطعت . واذا كانت مسألتك معقدة فيمكنك ان تحقق الخطوات الكبيرة اولاً ثم تناول الصغيرة بعد ذلك .

وماذا يفيدني ذلك ؟ اعطاء حل كل خطوة فيه صحيحة بالتأكيد .

المراجعة

من اين ابدأ ؟ من الحل كاملاً صحيحاً بكل تفاصيله .

ماذا اعمل ؟ انظر في الحل من شتى الوجوه وحاول ان تعثر على روابط مع معلوماتك السابقة .

انظر في تفاصيل الحل وحاول ان تجعلها مبسطة بقدر ما تستطيع . مر على خطواته وحاول ان تجعلها اقصر . حاول ان تنفذ الى مجمل الحل بلمحة خاطفة . حاول ان تعدل خطواته الكبيرة او الصغيرة . حاول ان تحسن الحل كله ، وان تجعله بديهياً وان تجعله يتسق مع معلوماتك السابقة اتساقاً طبيعياً بقدر الامكان. تفحص الطريقة التي قادتك اليه . حاول ان ترى معالمها وان تفيد منها في مسائل اخرى . تفحص النتيجة وحاول ان تفيد منها في مسائل اخرى .

ماذا يفيدني ذلك ؟ قد تجد حلاً جديداً احسن ، او قد تعثر على حقائق جديدة شائقة .

وانت على كل حال اذا جعلت عادتك ان تراجع حلولك وتسبر غورها بهذا الشكل ، فستكسب معرفة منظمة تنظيماً جيداً مهيأة تحت متناول يدك وستنمي ملكتك في حل المسائل .

٣ قاموس موجز في الهورستيكا

الاحاجي : ذكرنا في القسم ٣ ان اسئلة الثبت وتوجيهاته لا تنحصر في موضوع معين بل يمكن تطبيقها على كل مسألة مهما كان نوعها . ومن الممتع ان نجرب تطبيقها في حل بعض الالغاز . خذ مثلاً الكلمات :

« اتاني لأسامر بيتي »[١] .

والمطلوب ان نرتب احرف هذه الكلمات بحيث نجعلها لفظة واحدة ذات معنى . فاثناء حل هذه الاحجية قد نجد ان بعض اسئلة الثبت تساعد على الحل وقد توحي به .

ما المجهول ؟ كلمة .

ما المعطيات ؟ الكلمات الثلاث : اتاني لأسامر بيتي .

ما الشرط ؟ الكلمة المطلوبة تتكون من ١٥ حرفاً هي حروف الكلمات الثلاث . وهي كلمة عربية وربما يوحي عدد حروفها بانها من الكلمات الدخيلة . ارسم شكلاً : قد يفيدنا ان نشير الى ١٥ موضعاً هي مواضع حروف الكلمة

— — — — — — — — — — — —

هل يمكنك ان تضع المسألة بلغتك ؟ المطلوب ان نجد كلمة تتكون من الحروف التالية :

---

(١) لقد استبدلت كلمات المؤلف بهذه الكلمات كي تصبح لاحجية ذات معنى باللغة العربية . (المترجم)

أ أ أ أ ي ي ي ب ت ث ر س ل م ن .

هذا وضع آخر لنص المسألة (انظر المادة : المسائل المساعدة ٦) . وهو قد يكون انسب فوضع احرف العلة والاحرف الصائتة كلاً على حدة ربما كان انسب من ترتيب الحروف ابجدياً او حسب وضعها في الكلمات الثلاث .

اذا لم تستطع ان تحل المسألة المقترحة فجرب ان تحل مسألة ذات صلة بها . والمسألة ذات الصلة بها هي تكوين كلمات من بعض هذه الحروف . فقد نستطيع ان نكوّن منها كلمات قصيرة ثم كلمات اطول فاطول وكلما زادت حروف الكلمة صارت اقرب الى المطلوب .

هل يمكنك ان تحل قسماً من المسألة ؟ ان الكلمة طويلة بشكل ملحوظ . وهذا غير مألوف في الكلمات العربية وربما كان من اسباب طولها مقاطع مضافة في اولها وآخرها . ما المقاطع المألوفة من هذا النوع ؟

أل .... ا ت أو

أل .... ي ن

خذ جزءاً من الشرط واهمل الباقي . فكر مثلاً في كلمة طويلة فيها س و م .

ولكن اسئلة الثبت وتوجيهاته ليست سحراً يحل كل لغز بقدرة قادر فلا بد من مجهود نبذله . واذا شاء القارىء ان يجد هذه الكلمة فليجرب مرة بعد مرة . اما الاسئلة والتوجيهات فكل ما تعمله هو ان تساعد الذهن على التركيز وتبقيه فعالاً . فنحن اذا فشلنا في حل مسألة قد نميل الى اهمالها ولكن الاسئلة والتوجيهات توحي لنا بتجربة جديدة وقد تفتح لنا آفاقاً جديدة — انها تجدد لدينا الدافع على الحل وتحضنا على مزيد من التفكير .

وفي المادة : التفكيك والربط من جديد ٨ مثال آخر .

الاختبار بالوحدات

هذه عملية معروفة سريعة فعالة في تحقيق القوانين الهندسية والفيزيائية .

١ – ولكي نتذكرها لنأخذ قطعة المخروط الدائري القائم . فليكن

نق نصف قطر القاعدة السفلية ،

نقَ نصف قطر القاعدة العلوية ،

ع ارتفاع القطعة ،

ح مساحة السطح الجانبي للقطعة .

فاذا اعطينا نق ، نقَ ، ع امكن ايجاد ح وهذا يؤدي الى القانون .

ح = ط (نق + نقَ) $\sqrt{(\text{نق} - \text{نقَ})^{٢} + \text{ع}^{٢}}$.

فلنختبر هذا القانون بمبدأ الوحدات :

فوحدات الكميات الهندسية ظاهرة لا التباس فيها فان نق ، نقَ ، ع ، اطوال تقاس بالسنتيمترات (اذا نحن استعملنا الوحدات العلمية) ووحدتها سم . والمساحة ح تقاس بالسنتيمترات المربعة ووحدتها سم^{٢} . والكمية ط = ٣،١٤١٥٩ ... عدد مجرد واذا شئنا ان نعطيها وحدة فنقول انها سم^{٠} = ١ .

وكل حد من حدود حاصل الجمع يجب ان يكون له ذات الوحدات والاخيرة هي وحدات حاصل الجمع ايضاً . فان نق ، نقَ ، (نق + نقَ) لها وحدة واحدة هي سم . والحد ان (نق – نقَ) ^{٢} ، ع^{٢} لهما وحدة واحدة بالطبع هي سم^{٢} .

ووحدة حاصل الضرب هي حاصل ضرب وحدات المضاريب وهناك مثل هذه القاعدة بخصوص القوى . فاذا استبدلنا الكميات بوحداتها في طرفي القانون الذي نختبره ينتج .

سم^{٢} = ١ × سم × $\sqrt{\text{سم}^{٢}}$.

فما دام الامر كذلك فالاختبار لم يكتشف خطأ في القانون ، والقانون إذن صمد لهذا الاختبار .

انظر امثلة أخرى في القسم ١٤ والمادة : هل يمكن ان نحقق النتيجة ؟ ، ٢.

٢ – ويمكن تطبيق اختبار الوحدات على النتيجة النهائية للمسألة كما يمكن تطبيقها على النتائج المتوسطة وكذلك على نتائجنا ونتائج غيرنا (وهي تفيد في تتبع الاخطاء في اوراق الامتحانات) وعلى القوانين التي تستعيدهـا ذاكرتنا والقوانين التي نقدرها تقديراً .

فاذا تذكرت القانون ٤ ط نق^{٢} و $\frac{٤}{٣}$ ط نق^{٣} لمساحة الكرة وحجمها ولم تستطع تمييز أحدهما من الآخر فاختبار الوحدات يزيل شكوكك بسرعة .

٣ – واختبار الوحدات اهم في الفيزياء منه في الهندسة .

فلنأخذ الرقاص « البسيط » وهو جسم ثقيل صغير معلق بسلك نعتبر طوله لا يتغير ووزنه شيئاً ضئيلاً مهملاً . وليكن ل طول السلك و ج تسارع الجاذبية و ن فترة تذبذب الرقاص .

ان الإعتبارات الميكانيكية تقضي ان ن تعتمد قيمتها على ل و ج وحدهما ولكن ما شكل اعتمادهما ؟

قد نتذكر او نفترض ان القانون من النوع :

$$ن = ك\ ل^{م}\ ج^{د}$$

حيث ك ، م ، د اعداد ثابتة . اي اننا نفترض هنا ان ن تتناسب مع ل^{م} و ج^{د} ، قوتان من قوى ل و ج .

فلننظر الى الوحدات . ن زمن وهي تقاس بالثواني ووحدتها ث . ووحدة ل هي سم ووحدة التسارع ج هي سم ث$^{-٢}$ ووحدة العدد الثابت ك هي ١ . فالاختبار بالوحدات يؤدي الى النتيجة :

$$ث = ١ \times سم^{م} \times (سم\ ث^{-٢})^{د}$$

$$اي\ ث = سم^{(م + د)} \times ث^{-٢د}$$

ولكن يجب ان تكون قوى الوحدات الرئيسية سم و ث متساوية في الطرفين.

اذن $$\text{م} + \text{د} = \text{٠} \text{ ، } \text{١} = -\text{٢}\,\text{د}$$

اذن $$\text{د} = -\frac{\text{١}}{\text{٢}} \text{ ، } \text{م} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} .$$

اذن قانون فترة التذبذب ن يجب ان يكون بالشكل

$$\text{ن} = \text{ك}\,\text{ل}^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}}\,\text{ج}^{\frac{-\text{١}}{\text{٢}}} = \text{ك}\sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ج}}}$$

فالاختبار بالوحدات اعطانا الكثير في هذه الحالة ولكنه لا يمكن ان يعطي كل شيء . فهو اولاً لا يعطينا اي معلومات عن العدد الثابت ك (وهو في الواقع ٢ ط) . وهو ثانياً لا يحدد مدى صحة هذا القانون فهو يصح بشكل تقريبي اذا كانت ذبذبات الرقاص صغيرة (وهو دقيق في حالة الذبذبات المتناهية في الصغر) . ورغم هذا فان فكرة الوحدات أتاحت لنا بلا شك ان نجد بسهولة وبابسط الوسائل جزءاً جوهرياً في قانون يحتاج تفصيل الامر فيه الى معلومات عالية . ومثل هذا نجده في حالات كثيرة .

اختبر تقديرك : قد يكون صائباً ، ولكن من الحمق ان تتخذ التقدير البراق قضية مسلمة كما تفعل الشعوب البدائية . اذ قد يكون تقديرك خاطئاً . ولكن من الحمق ايضاً ان تعرض كلية عن التقدير المحتمل كما يفعل المتحذلقون احياناً . ان بعض التقديرات تستحق ان تختبر وتؤخذ مأخذ الجد وهذه هي التي تتراءى لنا بعد ان نكون قد درسنا دراسة عميقة وفهمنا فهماً تاماً المسألة التي نرغب بحلها رغبة اكيدة فهذه التقديرات تحوي عادة بعض الحق وان تكن طبعاً قلما تحوي الحق كله. ولكن ثمة مجال للوصول الى الحق كله باختبار هذه التقديرات اختباراً لائقاً .

وكم من تقدير ثبت بطلانه ولكنه أفاد اذ ادى الى تقدير احسن .

وليس من فكرة هي شر محض الا عنـد من لا يملك نظرة ممحصة . والشر المحض هو ألا تكون ثمة فكرة اطلاقاً .

١ - **لا تعمل** : اليك قصة نموذجية بطلها زيد من النـاس . زيد موظف في أحد المكاتب كان يداعب نفسه امل بالحصول على زيادة ما في مرتبه . ولكن مصير أمله كمصير آمال كثيرة ، كان الخيبة والفشل . فقد زيدت رواتب بعض من زملائه ولم يزد راتبه . ولم يستطع زيد ان يأخذ الامر بهدوء فقد قلق وزاد في القلق حتى ساوره الشك في ان المدير عمرو هو المسؤول عن تحطيم امله بالزيادة.

ولسنا نلوم زيداً لهذا الشك اذا ساوره فثمة دلائل تشير بيدهـا الى المدير عمرو . ولكن الغلطة الكبرى ان زيداً بعد ان تسرب اليه هـذا الشك اغمض عينه عن كل الدلائل التي تبرىء المدير عمرو . ثم بلغ به القلق مبلغاً جعله يعتقد اعتقاداً جازماً ان مديره عدو شخصي له فصار يتصرف تصرفاً احمق جعله يكاد ينجح في ان يصبح المدير عدواً حقيقياً له .

والمشكلة ان زيداً يصنع ما يصنعه اكثرنا فآراؤه الرئيسية لا تتغير ابداً . انه قد يغير آراء ثانوية ، في أحوال ليست بالنادرة وبصورة مفاجئة . ولكنه لا يضع آراءه موضع شك ، لا الرئيسية منها ولا الثانوية . فما دام يحملها فهو لا يشك بها ، ولا يزنها ، ولا يختبرها بنظرة ممحصة ، بل هو يضيق ذرعاً بالفحص الناقد اذا هو فهم ما يعنيه الفحص الناقد .

فلنسلم بأن زيـداً على حق الى حد ما . فهو كثير الاعمـال وهو يتحمل مسئوليات في المكتب ومسئوليات في البيت ، ومن ثم لا يتسع وقتـه لوزن الامور وفحصها ، وهو على احسن الفروض قـد يجد متسعاً لمراجعـة بعض من معتقداته ولكن لماذا يثير الشك حول هذا المعتقد او ذاك ما دام لا يجـد الوقت للنظر في شكه ؟

ولكن لا تفعل ما فعل زيد . لا تدع شكك او تقديرك او ظنك يتضخم بلا

تحقيق حتى يرسخ رسوخاً لا يمكن بعده استئصاله . وفي الامور النظرية والعلمية نجد أن الفكرة ، مهما حسنت ، يؤذيها التسليم بغـــير تمحيص ويغذيها الفحص الناقد .

٢ - **مثال رياضي :** اوجد اكبر شكل رباعي يمكن رسمه بمحيط معلوم .

ما المجهول ؟ شكل رباعي.

ما المعطيات ؟ محيط الشكل .

ما الشرط ؟ الشكل الرباعي المطلوب يجب ان يكون اكبر مساحة من اي رباعي آخر له هذا المحيط .

هذه مسألة تختلف كثيراً عن المسائل المألوفة في الهندسة الابتدائية فما علينا لو بدأنا نقدر الامر تقديراً .

اي رباعي يحتمل ان يكون اكبر مساحة ؟ ما أبسط تقدير ؟ ربما نكون سمعنا ان الدائرة اكبر مساحة من اي شكل يساويها محيطاً . وقد يتراءى لنا سبب يجعل هذه الحقيقـــة تبدو لنا معقولة . فأي شكل رباعي اقرب الى الدائرة ؟ اي شكل رباعي يقاربها تماثلاً ؟

ان المربـع تقدير يخطر في البال . فاذا اخذنا تقديرنا هذا مأخذ جد علينا ان نتوصل الى فهم معناه ثم ان نجد الجرأة لوضع المسألة بالشكل التالي : « من بين جميـع الاشكال الرباعية التي تتساوى محيطاتها يكون المربـع اكبرها مساحة » . فاذا وطدنا العزم على تحقيق هذا النص يتغير الموقف . فقد كان امامنا في البدء « مسألة ايجاد » وها نحن بعـــد ان وصلنا الى التقدير حولناها الى « مسألة برهان » . فعلينا ان نبرهن على صحة تقديرنا او بطلانه .

وان كنا لا نعرف مسألة شبيهة بمسألتنا هذه مما حللناه من قبل فقد نجـد الامر صعباً . اذا لم تستطع ان تحل المسألة المعطاة لك فجرب ان تحل اولاً مسألة ذات صلة بها . هل يمكنك ان تحل جزءاً من المسألة ؟ وقـد يخطر في بالنا ان المربـع اذا كان له هذه الميزة بين الاشكال الرباعية فان له هذه الميزة ايضاً بـين

المستطيلات ، وبذا فان جزءاً من المسألة يكون قد ثبت اذا نحن استطعنا ان نبرهن : « ان المربع اكبر المستطيلات التي تساويه محيطاً » .

وهذه نظرية تبدو اسهل من السابقة وهي لا شك اضعف فلننظر فيها ولتكن لدينا الجرأة على وضعها بنص جديد ، بشكل جبري : اذا كان الضلعان المتجاوران في المستطيل أ و ب فمساحته أ ب .

وضلع المربع الذي يساوي هذا المستطيل بالمحيط هو $\frac{\text{أ} + \text{ب}}{٢}$. فمساحة المربع $\left(\frac{\text{أ} + \text{ب}}{٢}\right)^{٢}$. وهذه يجب ان تكون اكبر من مساحة المستطيل واذن فان :

$$\left(\frac{\text{أ} + \text{ب}}{٢}\right)^{٢} > \text{أ ب} .$$

فهل هذا صحيح ؟ وهذا الشكل يمكن ان نحوله الى :

$\text{أ}^{٢} + ٢ \text{ أ ب} + \text{ب}^{٢} > ٤ \text{ أ ب}$.

وهذا صحيح لأنه يعني ان $\text{أ}^{٢} - ٢ \text{ أ ب} + \text{ب}^{٢} > $ صفر ،

أي ان $(\text{أ} - \text{ب})^{٢} > $ صفر .

وهذه متباينة صحيحة الا اذا كان أ = ب اي اذا كان المستطيل مربعاً . لم نحل المسألة بعد ، ولكننا واجهنا تقديراتنا بصراحة وجرأة — وهذا تقدم .

٣ — **مثال غير رياضي :** في مسألة في الكلمات المتقاطعة نريد ان نجد كلمة من خمسة احرف تتمم الحجلة .

« دليل رمضان — — — — — يمنة ويسرة » .[1]

---

(١) قد استبدلت كلمة المؤلف كي يصبح المثال ذا معنى باللغة العربية . (المترجم)

ما المجهول ؟ كلمة .
ما المعطيات؟ نعرف عدد احرف الكلمة فهو خمسة .
ما الشرط ؟ ان الكلمة تعني شيئاً له علاقة برمضان ولكنه غامض.

فعلينا ان نعيد النظر في هذا الشرط : دليل رمضان .. ، ما هـــو ؟ أهو نتيجته ؟

تقويه ؟ — ما هو ؟

مهما يكن فالظاهر ان الكلمة تنتهي بالحرف هـ . وهذا تقدير قد يكون صائباً وقد لا يكون .

هل يمكن تحقيق هذه النتيجة ؟ اذا قاطعت هذه الكلمات كلمة اخرى في الحرف الاخير فيمكن ان نختبر بها صحة تقديرنا .

فاذا اكدت ذلك الكلمة الاخرى، او اذا لم يقم دليل على بطلان هذا التقدير، أمكن ان نتابع حلنا . فلنسأل مرة ثانية :

ما الشرط ؟ واذ نعيد النظر في الشرط من جديد ، قد يلفت انتباهنـــا العبارة : « يمنة ويسرة » . فهل معنى هذا ان الكلمـــة تقرأ من اليمين ومن اليسار ؟ هذا تقدير آخر قد يكون ممكناً . فلنمض معه على كل حال ، فنحن نجري تجربة قد تصيب وقد تخطىء .

فاذا صح تقديرنا كانت الكلمة بالشكل : هـ — — — ٥ .

وعدا ذلك فالحرف الثاني يجب ان يكون كالرابع ، اما الثالث فيغلب على الظن انه حرف علة .

بعد هذا يسهل على القارىء ان يحزر الكلمة بنفسه ولو بتجربة جميع حروف الابجدية . فان اخفق ففي التقديرات السابقة خطأ بالتأكيد .

اذا لم تستطع ان تحل المسألة المعطاة لك

فلا تدع الفشل يسيطر عليك ، بل حاول ان تجد السلوى بمسألة اسهل تقدر

على حلها . حاول اولا ان تحل مسألة تتصل بمسألتك ، فبذلك قد تستجمع من الشجاعة ما يدفعك الى معاودة الكرة على مسألتك . لا تنس ان ميزة الانسان هي في مقدرته على الدوران حول العقبة التي يمكنه تخطيهـا ، اي في ابتكاره مسألة مساعدة عندما يبدو ان المسألة الاصلية تستعصي على الحل .

هل يمكنك ان تتخيل مسألة سهلة ذات صلة بمسألتك ؟ هنا تجد انك تخترع المسألة ، لا تستعيدها من ذاكرتك كما تفعل في جوابك عن السؤال : هل تعرف مسألة تتصل بمسألتك ؟

وجميـع اسئلة الثبت التي يضمها عنوان هذه المادة تستهدف غاية واحدة هي تغيير المسألة . فانظر المادة : تغيير المسألة . وهناك عدة وسائل لتحقيق هـذا الهدف كالتعميم والتخصيص والقياس ووسائل اخرى من قبيل تفكيك المسألة وربطها من جديد .

ارسم شكلاً

انظر مادة الاشكال .

ادخال الرموز المناسبة

انظر مادة الترقيم .

الاستقراء والاستقراء الرياضي :

الاستقراء عملية نستنتج بها قوانين عامة بدراسة أمثلة خاصة وربطها بعضها ببعض ، واما الاستقراء الرياضي فيستعمل في حقل الرياضيات فقط لاثبـات نظريات من نوع معين . ومن المؤسف ان التعبيرين متشابهان فليس ثمة رابطـة قوية منطقية بين الاستقراء والاستقراء الرياضي . ولكن هنالك رابطة عمليـة بينهما فنحن نستعمل في احيان كثيرة كلا العمليتين معـاً . ولنوضح العمليتين بذات المثال .

(١) قد نلاحظ صدفة ان

$$١ + ٨ + ٢٧ + ٦٤ = ١٠٠$$

فاذا لاحظنا المكعبات والمربع فقد نضع هذا بالشكل التالي :

$$١^٣ + ٢^٣ + ٣^٣ + ٤^٣ = ١٠^٢$$

فكيف يحدث ذلك ؟ وهل يحدث كثيراً ان مجموع مكعبات متوالية يساوي مربعاً ؟

ونحن بسؤالنا هذا كالعالم الطبيعي الذي يثير انتباهه نبتة غريبة او جسم جيولوجي غريب فيوحي اليه بسؤال عام . وسؤالنا العام هنا يتعلق بحاصل جمع المكعبات المتوالية .

$$١^٣ + ٢^٣ + ٣^٣ + \ldots + ن^٣ .$$

وقد قادنا اليه الحالة الخاصة التي رأيناها حيث $ن = ٤$.

فماذا نعمل تجاه سؤالنا ؟ ما يعمله العالم الطبيعي : ندرس حالات اخرى خاصة . الحالتان $ن = ٢$ او ٣ اسهل ، والحالة $ن = ٥$ هي التالية . فلنضف تكميلاً للبحث الحالة $ن = ١$ وبترتيب هذه الحالات ترتيباً واضحاً كما يفعل الجيولوجي في نماذج المعدن الذي يدرسه نحصل على الجدول التالي :

$$١ = ١ = ١^٢$$

$$١ + ٨ = ٩ = ٣^٢$$

$$١ + ٨ + ٢٧ = ٣٦ = ٦^٢$$

$$١ + ٨ + ٢٧ + ٦٤ = ١٠٠ = ١٠^٢$$

$$١ + ٨ + ٢٧ + ٦٤ + ١٢٥ = ٢٢٥ = ١٥^٢$$

ان من الصعب على الذهن ان يسلم بان كل حواصل الجمع هذه من المكعبات المتوالية تساوي مربعات بمجرد الصدفة . وبالمثل يجد العالم الطبيعي ان من الصعب ان يشك بان القانون العام الذي توحي به الحالات الخاصة الكثيرة ليس

صحيحاً . لقد كاد القانون العام يثبت لديه بالاستقراء . اما الرياضي فهو اكثر تحفظاً في اسلوب تعبيره وان يكن كالطبيعي في اسلوب تفكيره . فهو هنا يقول ان الاستقراء يشير بقوة الى النظرية : مجموع اول ن من المكعبات المتوالية مربع كامـل .

(٢) لقد ادى بنا الامر الى ترجيح قانون رائع ولكنه يبعث على الحـيرة والتساؤل . فلماذا يكون مجموع المكعبات المتوالية هذا مربعاً ؟ انـــه كما يبدو مربع على كل حال .

وماذا يصنع العالم الطبيعي في هذه الحالة ؟ يفحص مزيداً من الحالات ليرى صحة تخمينه . ولديه في ذلك عدة طرق فقد يجمع مزيداً من الادلة التجريبية ، ولو شئنا ان نصنع مثله لاختبرنا صحة الحالات التاليـة ن = ٦ ، ٧ ، ... وهو قد يعود لفحص الحالات التي ادت به الى تخمينه هذا فيقارن بينها بدقة ويحاول ان يستخلص منها نظاماً اعمق او قياساً اوسع . فلننسج الآن على منواله في هذه الناحية .

ولنعـد الى فحص الحالات ن = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، التي وضعناها في الجدول السابق . لماذا يكون كل حاصل جمع مربعاً ؟ وماذا عن هذه المربعات ؟ اساساتها ١ ، ٣ ، ٦ ، ١٠ ، ١٥ ، فماذا عن هذه الاساسات ؟ هل بينها نظام اعمق وقياس اوسع ؟ كيف تتزايد ؟ ان الفروق بين الاساسات المتواليـــة تتزايد ايضاً :

٣ − ١ = ٢ ، ٦ − ٣ = ٣ ، ١٠ - ٦ = ٤ ، ١٥ − ١٠ = ٥ .

وهذا التوالي ، كما يبدو عياناً ، منتظم . وهنا يبدو لنا قياس مدهش بين اساسات هذه المربعات ونظام رائع يشمل الاعداد ١ ، ٣ ، ٦ ، ١٠ ، ١٥ :

١ = ١

٣ = ١ + ٢

٦ = ١ + ٢ + ٣

١٠ = ١ + ٢ + ٣ + ٤

١٥ = ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥

فاذا كان هذا النظام عاماً (وانه لمن الصعب ان نظنـــه غير ذلك) فان النظرية التي خمناها تتخذ شكلاً ادق .

فاذا كان ن = ١ ، ٢ ، ٣ ، ...

فان $١^{٣} + ٢^{٣} + ٣^{٣} + \dots + ن^{٣} = (١ + ٢ + ٣ + \dots + ن)^{٢}$

٣ — القانون الذي اوردناه وجد بالاستقراء . والطريقة التي بها وجد تعطينا فكرة عن الاستقراء وهي فكرة من جانب واحد ، ناقصة ولكنها غير مشوهة. فالاستقراء يبحث عن النظام والروابط التي تمسك حالات البحث بعضها ببعض . واهم وسائله التعميم والتخصيص والقياس . والتعميم الاولي يبـــدأ بمحاولة لفهم الحالات التي نضعها قيد الدرس وهو مبني على القياس ويتحقق بانطباقـــه على مزيد من الحالات الخاصة .

وعند هذا الحد نحجم عن الافاضة في بحث الاستقراء فبين الفلاسفة اختلاف كبير في شأنه . ولكن يجدر بنا ان نذكر ان كثيراً من النتائج الرياضية قــد اكتشفت بالاستقراء ثم اثبتت صحتها فيما بعد . فان الرياضيات اذ تعرض بشكلها اليقيني علم استنتاجي منظم ولكنها في مرحلة الخلق علم تجريبي استقرائي .

٤ — ونحن في الرياضيات كشأننا في العلوم الفيزيائيــة نستعمل الملاحظــة والاستقراء لاكتشاف القوانين العامة مع فرق واحد ، ذلك ان العلوم الفيزيائية ليس لديها مــا هو اوثق من الملاحظة والاستقراء . امــــا الرياضيات فلديها البرهان اليقيني .

فبعد الدراسة التجريبية ننظر في الامر من زاوية جديدة ونتطلب الدقــة والحجة المنطقية . لقد اكتشفنا نتيجة شائقة ولكن اسلوب التفكير الذي ادى

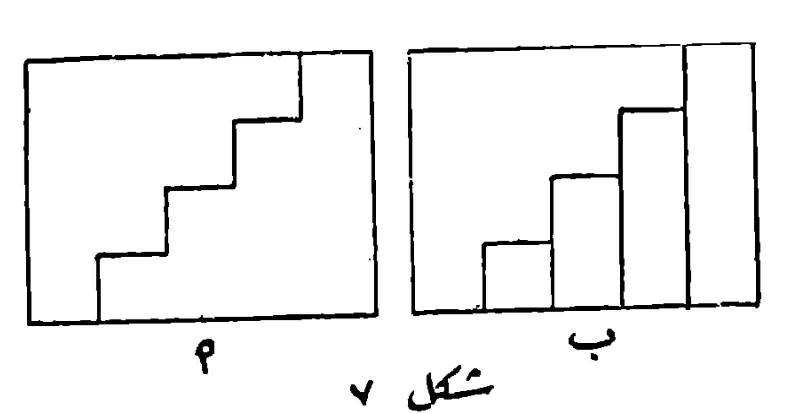
اليها كان مجرد اسلوب استصوابي تجريبي موقت هورستيكي . فلنحاول ان نقيم نظريتنا نهائياً على برهان يقيني .

فنحن الآن امام « مسألة برهان » . نريـــد ان نبرهن صحة النظرية التي اوردناها او بطلانها (انظر ٢ اعلاه) وقبل ذلك قد نلجأ الى تبسيط طفيف ، اذ قد نعرف ان :

$$١ + ٢ + ٣ + \cdots + ن = ن \frac{(ن + ١)}{٢}$$

وعلى كل فهذا امر يسهل اثباته : خذ مستطيلا ضلعاه ن و ن + ١ واقسمه الى نصفين بخط متقطع كما في شكل (٧ أ) حيث تظهر الحالة ن = ٤ . فكل من النصفين يشبه السلم ومساحته لها التعبير التالي ١ + ٢ + ... + ن .

وعندما يكون ن = ٤ تكون المساحة ١ +٢+٣+٤ (انظر شكل٧ب). ولكن المساحة الكلية للمستطيل هي ن (ن+١) ومساحة كل نصف نصفها ، وهذا يثبت القانون .



شكل ٧

فالنتيجة التي وجدناها بالاستقراء يمكن الآن ان نضعها بالشكل :

$$١^٣ + ٢^٣ + ٣^٣ + \cdots + ن^٣ = \left(\frac{ن (ن + ١)}{٢} \right)^٢ .$$

٥ – فاذا لم يكن لدينا أي فكرة عن طريقة لاثبات هذا نستطيع على الاقل ان نختبر صحته فلنختبر صحة اول حالة لم نختبرها بعد وهي ن = ٦ ، ففي هذه الحالة يعطي القانون :

$$١ + ٨ + ٢٧ + ٦٤ + ١٢٥ + ٢١٦ = \left(\frac{٦ \times ٧}{٢} \right)^٢ .$$

وبالحساب يتبين ان هذا صحيح فقيمة كل من الطرفين ٤٤١ .

ونستطيع ان نختبر صحة القانون بشكل اقوى . فهو على الارجح صحيح دائماً ، صحيح لكل قيم ن . هل يبقى القانون صحيحاً عندما ينتقل من اية قيمة ن الى القيمة التي تتلوها ن + ١ ؟ فاذا كان القانون صحيحاً بالشكل الذي سبق يجب ان ينتج ان :

$$١^{٣} + ٢^{٣} + ٣^{٣} + \cdots + \text{ن}^{٣} + (\text{ن}+١)^{٣} = \left(\frac{(\text{ن}+١)(\text{ن}+٢)}{٢} \right)^{٢}$$

وهنالك طريقة سهلة لتحقيق هذه النتيجة. فلنطرح منها النتيجة السابقة التي وضعناها للحالة ن ينتج معنا :

$$(\text{ن}+١)^{٣} = \left(\frac{(\text{ن}+١)(\text{ن}+٢)}{٢} \right)^{٢} - \left(\frac{\text{ن}(\text{ن}+١)}{٢} \right)^{٢}$$

وهذا امر يسهل تحقيقه . فالطرف الايسر يمكن ان نضعه كما يلي :

$$\left(\frac{\text{ن}+١}{٢} \right)^{٢} \left[(\text{ن}+٢)^{٢} - \text{ن}^{٢} \right] = \left(\frac{\text{ن}+١}{٢} \right)^{٢} \left[\text{ن}^{٢}+٤\text{ن}+٤-\text{ن}^{٢} \right]$$

$$\frac{(\text{ن}+١)^{٢}}{٤} (٤\text{ن}+٤) = (\text{ن}+١)^{٢}(\text{ن}+١) = (\text{ن}+١)^{٣}$$

فالقانون الذي وجدناه بالتجربة اذن صمد لاختبار حيوي .

والآن ما معنى هذا الاختبار ؟ لقد حققنا بما لا يقبل الشك ان :

$$(\text{ن}+١)^{٣} = \left[\frac{(\text{ن}+١)(\text{ن}+٢)}{٢} \right]^{٢} - \left[\frac{\text{ن}(\text{ن}+١)}{٢} \right]^{٢}$$

ونحن لم نتأكد بعد اذا كان ما يلي صحيحاً :

$$١^٣ + ٢^٣ + ٣^٣ + \cdots + ن^٣ = \left(\frac{ن (ن + ١)}{٢} \right)^٢$$

ولكن اذا عرفنا ان هذا صحيح نستدل منه بإضافة العلاقة التي حققناها يقيناً ان :

$$١^٣ + ٢^٣ + ٣^٣ + \cdots + ن^٣ + (ن + ١)^٣ = \left(\frac{(ن + ١) (ن + ٢)}{٢} \right)^٢$$

هي ايضاً صحيحة . وهذا هو نفس القانون مطبقاً على العدد الصحيح التالي: ن + ١ . ولكننا قد عرفنا بالتجربة ان تخميننا يصح في الحالات ن = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ . فبناء على ما تقدم ، ما دام التخمين يصح في الحالة ن = ٦ ، فهو يصح في الحالة ن = ٧ ؛ وما دام يصح في الحالة ن = ٧ ، فهو يصح في الحالة ن = ٨ ؛ وما دام يصح في الحالة ن = ٨ فهو يصح في الحالة ن = ٩ ؛ وهكذا دواليك . فالقانون يصح مع كل قيم ن ، فهو صحيح دائماً .

٦ – والبرهان السابق نموذج لحالات كثيرة مماثلة ، فما هي الخطوط الرئيسية في هذا النموذج ؟

الحقيقة التي نريد اثباتها يجب ان تكون معروفة مقدماً بشكل دقيق .

وهذه الحقيقة تعتمد على عدد صحيح ن .

وهي يجب ان تكون واضحة بحيث يكون بالامكان ان نختبر صحتها عندما ننتقل من الحالة ن الى الحالة التالية ن + ١ .

فاذا نجحنا في هذا الاختبار نجاحاً قاطعاً أمكن ان نستعمل خبرتنا التي حصلنا عليها من التجربة باثبات انه اذا صح القانون في الحالة ن فهو يصح في الحالة ن + ١ . وبعد هذا يكفي ان نعرف ان القانون يصح في الحالة ن = ١ فينتج انه يصح في الحالة ن = ٢ فهو كذلك يصح في الحالة ن = ٣ ؛ وهكذا بالانتقال من اي عدد صحيح الى العدد الذي يليه نثبت صحة القانون إطلاقاً .

وهذه طريقة تستعمل بكثرة تستدعي اعطاءها اسماً خاصاً . فقد نستطيع

ان نسميها « البرهان من ن الى ن + ١ » أو باسم أبسط « الانتقال الى العـــدد الصحيـح التالي » ، ولكنها سميت مع الاسف « الاستقراء الرياضي » .وهو اسم نتج عن طريق الصدفة . فالحقيقة التي نريد اثباتها قد نكون حصلنا عليهـا من أي مصدر ، ولا يهمنا من الناحية المنطقية هذا المصدر . غير اننا في حـــالات كثيرة كما في المثال السابق ، نجد ان مصدرنا الاستقراء اذ اننا عثرنا على الحقيقة باستقراء حالات خاصة وهكذا بدا البرهان كأنه تتمة رياضية للاستقراء .وهذا هو سبب التسمية .

٧ – واليك الآن نقطة اخرى قد تصفها بالحذق ولكنها على كل حال ذات اهمية لكل من يريد ان يوجد براهيناً بنفسه . ففيما سبق وجدنا حقيقتين مختلفتين بالملاحظة والاستقراء ، واحدة بعد الاخرى ، الاولى في (١) والثانية في (٢) . وقد كانت الثانية ادق من الاولى ، وعندما نظرنا فيها وجدنا ان بالامكان تحقيق الحالة عندما ننتقل من ن الى ن + ١ وهكذا تم لنا برهان«بالاستقراء الرياضي». فاذا اخذنا بالحقيقة الاولى وتغاضينا عن الدقة التي مكنتنا منها الثانية فقد يتعذر علينا الحصول على هذا البرهان . فالحقيقة الاولى فيالواقع اقل دقة واقلوضوحاً واصعب تناولاً وأضيق مجالاً عند التجربة والتحقيق . فانتقالنـا من الاولى الى الثانية ، من الاقل دقة الى الاكثر دقة ، كان خطوة تمهيدية هامة نحو البرهان النهائي .

وهذا امر يبدو فيه شيء من التناقض . فالحقيقة الثانية اقوى وهي تتضمن الاولى في حين أن الحقيقة الاولى الغامضة ، نوعاً ، لا تتضمن الثانية الواضحة . وهذا ما يجعل الثانية الاقوى اطوع من الاولى الاضعف ، وهذه هي بدعـــة المخترع (انظر المادة المقابلة في القاموس) .

استاذ الرياضيات التقليدي :

الاسطورة الشائعة عن استاذ الرياضيات انـه شارد الذهن يظهر في المجتمع وهو يحمل في كل من يديه مظلة مفقودة ، يدير وجهه للسبورة وظهره للطلاب .

يكتب « أ » وينطق ب ويعني جـ والحقيقة هي د . وله اقوال يتناقلها الناس جيلا بعد جيل .

« كما تحل هذه المعادلة التفاضلية يجب ان تنظر اليها حتى يتجلى لك الحل » .

« هذا مبدأ عام الى حد انه يستحيل ان نجد له تطبيقاً عملياً » .

« الهندسة فن يعلمك كيف تفكر تفكيراً صحيحاً في شكل غير صحيح » .

« طريقتي في التغلب على الصعوبة هي ان ادور حولها » .

« ما الفرق بين الطريقة والوسيلة ؟ الطريقة وسيلة تستعملها مرتين » .

ومهما يكن من امر فهنا شيء قد نفيده من هذا « الاستاذ التقليدي » . وانا لنرجو مخلصين الا يصير استاذ الرياضيات الذي لانفيد منه هو الاستاذ التقليدي .

الاشكال :

ليس رسم الاشكال من شأن المسائل الهندسية وحدها بل هو ايضاً عون هام في مسائل لا يبدو فيها لاول وهلة اي معنى هندسي . فلدينا اذن سببان للنظر في الدور الذي تلعبه الاشكال في حل المسائل .

١ — فاذا كانت مسألتنا هندسية يتوجب علينا ان نرسم لها شكلا . وهو شكل قد نرسمه في الذهن وقد نخططه على الورق . وهناك حالات قد يستحسن فيها تخيل الشكل بدون رسم . ولكن اذا كان علينا ان نفحص تفاصيل شتى واحداً بعد واحد يتوجب ان نرسم لها شكلاً ، ذلك ان كثرة التفاصيل تجعل تخيلها كلها في آن واحد امراً صعباً ولكن الشكل المرسوم يظهر هذه التفاصيل جميعاً . والذي نحمله في مخيلتنا يسهل ان ننساه . ولكن اذا هو وضع على الورق يبقى ويذكرنا كلما عدنا اليه بما لاحظناه حوله وهو يوفر علينا مشقة استعادة ما استنتجناه عنه .

٢ — ولنوجه انظارنا الآن بشكل خاص الى استعمال الاشكال في العمليات (او الانشاءات) الهندسية .

فنحن نبدأ الدراسة التفصيلية للمسألة التي من هذا النوع برسم شكل نظهر فيه المجهول والمعطيات كما يقتضي شرط المسألة . ثم نحن لكي نفهم المسألة بوضوح ننظر في كل واحدة من المعطيات على حدة وفي كل جزء من اجزاء الشرط على حدة ثم نربط هذا كله وننظر في الشرط كوحدة كاملة ونحاول ان نرى في وقت واحد مختلف الروابط التي تقتضيها المسألة . فلسنا اذن نستطيع ان نعالج هذا كله تفكيكاً وربطاً بدون شكل .

ولكننا قبل ان نحل المسألة حلاً نهائياً لا نستطيع ان نجزم يقيناً ان رسم الشكل امر ممكن . فهل يمكن رسم شكل يفي كلياً بالشرط المفروض في المسألة؟ قبل حل المسألة نهائياً لا نستطيع ان نجيب بالايجاب . ومع ذلك نرى ان نبدأ بشكل نفترض فيه ان المجهول والمعطيات ترتبط بعضها ببعض كما يقتضي الشرط. وفي ذلك ما ينم على اننا نفترض افتراضاً لا يسنده دليل .

كلا . ليس ذلك صحيحاً في كل حال . ونحن لا يضيرنا اذا كنا بصدد دراسة المسألة قد افترضنا وجود ما يحقق الشرط المفروض ويرتبط فيه المجهول بالمعطيات كما يقتضي الشرط ، على ان نميز بين الاحتمال المجرد والواقع الاكيد . وكما ان القاضي لا يضيره اذا كان اثناء استجواب المتهم يفترض انه هو الذي ارتكب الجريمة التي يحاكم من اجلها ، شرط الا يتأثر القاضي بافتراضه هذا .

فالرياضي والقاضي يحققان في الامكانية التي امامهما بلا تحيز ثم يصدران حكمهما على اساس ما يؤدي اليه التحقيق .

وهذه الطريقة لبدء دراسة المسألة الانشائية برسم شكل يفترض فيه انه يفي بالشرط طريقة قديمة استعملها رياضيو اليونان واليها يشير بابس في كلمته المقتضبة المبهمة : «اعتبر ما يطلب حله كأنه محلول» . ولكن الكلمة التالية اقل اقتضابا واكثر وضوحاً : « افترض شكلا واعتبر انه يفي بالشرط كله » . وهذا يقال بصدد مسائل الهندسة العملية ولكن لا داعي لحصره فيها اذ هو قد يشمل جميع

« مسائل الايجاد » اذا وضعناه بالصورة التالية : افترض حالة واعتبر أنها تفي بالشرط كله .

قارن مادة بابس ٦ .

٣ — ولننظر الآن في بضعة امور تتعلق برسم الاشكال .

(أ) — هل نرسم الشكل بالدقة ام بالتقريب وبالادوات الهندسية ام باليد ؟

لكل من الطريقتين فوائدها . فالشكل الدقيق في الهندسة له مبدئياً قيمة القياسات الدقيقة في الفيزياء ، فاذا وضعنا الشكل الدقيق دون القياس الدقيق مرتبة فلأن مجال تطبيق النظريات الهندسية اوسع بكثير مما للقوانين الفيزيائية . الا ان المبتدىء يجب ان يرسم اشكالا كثيرة بادق ما يمكنه كيما يكون لديه مران متين . ثم ان الرسم الدقيق يكون اكثر ايحاء للمبتدىء والمتقدم على السواء .

بيد ان الاشكال التي نرسمها باليد بعناية تكفي غالباً لتلمس الحل الذي نبتغيه وفيها توفير للوقت ، شرط الا يظهر الشكل سخيفاً ، والخطوط التي نفترض انها دوائر لا يجوز ان تظهر كحبات البطاطس ، والخطوط التي نفترض انها مستقيمة لا يجوز ان تتعرج كأمواج الشاطىء .

فالشكل البعيد عن الدقة قد يوحي بنتائج خاطئة ، ولكن الخطر في ذلك ليس كبيراً ولدينا عدة طرق لتلافيه لا سيما تغيير الشكل . وليس ثمة خطر اذا نحن انصرفنا الى الروابط المنطقية في المسألة واعتمدنا الشكل كعون لنا لا كأساس نبني عليه نتائجنا . فالروابط المنطقية هي الاساس (والى هذا يشير عدد من الامثلة التناقضية المفيدة التي تستغل بمهارة الاشكال التي يتعمد رسمها بشكل غير دقيق) .

(ب) — والمهم هو اظهار الروابط بين عناصر المسألة مجتمعة وليس المهم الترتيب الذي ترسم به هذه العناصر . فاختر الترتيب الذي يناسبك . فاذا كنت تريد تصوير تثليث الزاوية مثلاً فعليك ان ترسم زاويتي أ ، ب بحيث تكون

أ = ٣ ب فاذا بدأت من زاوية ما أ فلا تستطيع أن ترسم ب بالمسطرة والبرجل. ولكن اذا اخترت زاوية ما صغيرة ب يصبح رسم أ امراً سهلا .

(ج) ويشترط في شكلك ان يخلو من اي تخصيص لا مبرر له . فعناصره يجب ان لا تنم عن روابط لا تقتضيها المسألة . فالخطوط يلزم الا تظهر متساوية او متعامدة ان لم يكن ثمة ضرورة لذلك والمثلثات يلزم الا تظهر متساوية الساقين او قائمة ان لم تشر المسألة الى ذلك . والمثلث الذي زواياه ٤٥ درجة ، ٦٠ درجة ، ٧٥ درجة ، هو بمعنى دقيق للكلمة ، ابعد ما يكون عن كل من المتساوي الساقين ومن القائم ، فتستطيع ان ترسم هذا المثلث او مثلثاً لا يبعد كثيراً عنه اذا شئت ان تنظر في مثلث عام لا تخصيص فيه[١] .

(د) وللتمييز بين الادوار المختلفة للخطوط المختلفة يمكن ان تجعل بعضها رقيقاً وبعضها سميكاً ، بعضها متصلا وبعضها متقطعاً ، او ان تميزها بالالوان . فالخط الذي ترسمه وانت لا تدري أيلزمك كخط مساعد ام لا يلزمك فاجعله خفيفاً ، والعناصر المعطاة يمكن ان ترسمها باللون الاحمر ثم تستعمل الواناً اخرى للعناصر الاخرى الهامة كالمثلثين المتشابهين ... الخ .

(هـ) ولتمثيل الاشكال الفراغية ، أنستعمل النماذج المجسمة ام الرسم على الورق والسبورة ؟ ان النماذج المجسمة شيء حسن ولكن في صنعها مشقة وفي شرائها اسراف . ولذا نكتفي عادة بالرسم وان يكن من غير الميسور ان نرسم اشكالاً جذابة . الا ان من المرغوب فيه ان يجرب المبتدئون صنع نماذج مجسمة

---

(١) اذا كانت زوايا المثلث أ ، ب ، ج ، وكانت ٩٠° > أ > ب > ج فان الفروق ٩٠° – أ ، أ – ب ، ب – ج يكون احدها على الاقل < ١٥° الا اذا كان أ = ٧٥° ، ب = ٦٠° ، ج = ١٥° . وواقع الامر ان :

$$\frac{\text{٣ (٩٠° – أ) + ٢ (أ – ب) + (ب – ج)}}{\text{٦}} = \text{١٥°} .$$

بالورق المقوى ، ومن المفيد ان نأخذ ما تقع عليه العين في حياتنا اليومية كنماذج تمثل المبادىء الهندسية ، فالصندوق والبلاطة وحجرة الدراسة تمثـــل متوازي المستطيلات ؛ كما يمثل القلم الاسطوانة الدائرية ، ومظلة المصباح الكهربائي قطعة المخروط الدائري القائم ... الخ .

٤ — والاشكال التي تخط على الورق يسهل رسمها ويسهل فهمها ويسهـل تذكرها . والمستوية منها تألفها العين بسهولة ويدركها الذهن بسهولة . فيمكن اذن ان نستغل فيها هذه الميزة ونستغل استعدادنا لمعالجة هذه الاشكال بتمثيل الموضوعات غير الهندسية بالرسم اذا استطعنا ان نبتكر تعبيراً هندسياً مناسباً عن هذه الموضوعات غير الهندسية .

والتمثيل الهندسي والرسوم البيانية وغير ذلك من الاشكال تستعمـل في الواقع في جميع الميادين العلمية ، لا في الفيزياء والكيمياء والعلوم الطبيعية فقط بل في الاقتصاد ايضاً وحتى في علم النفس. فبالتمثيل الهندسي المناسب قد نعبر عن كل شيء بلغة الاشكال ونختزل الكثير من المسائل الى مسائل هندسية .

ولذا فانت تستطيع ان ترسم شكلاً لمسألتـك حتى وان كانت لا تمت الى الهندسة بصلة . فان ايجاد طريقة جلية لتمثيل مسألة غير هندسية برسم هندسي قد يكون خطوة هامة نحو حلها .

افصل اجزاء الشرط بعضها عن بعض :

واجبنا الاول ان نفهم المسألة . وبعد ان نفهمها بوجـه عام ننصرف الى التفاصيل ، فننظر في اجزائها الرئيسية ، المجهول والمعطيات والشرط ، كلاً على حدة . فاذا اتضحت لنا هذه الاجزاء من غير ان تتبدى لنا فكرة جيدة نبحث عن تفاصيل جزئية اكثر . فننظر في المعطيات المختلفة كلاً على حدة . وعندما نفهم الشرط كله بوجه عام نفصل اجزاءه المختلفة بعضها عن بعض ، وننظر في كل جزء على حدة .

وهنا يتضح لنا الدور الذي يلعبه الاقتراح الذي ننظر فيه الآن . انــه يدعونا الى خطوة نعملها عندما نحاول ان نتصور المسألة تصوراً واضحاً وننظر في تفاصيلها الدقيقة . وهي خطوة من خطوات تفكيك المسألة وربطهـا من جديد .

افصل اجزاء الشرط بعضها عن بعض . هل يمكنك ان تكتبها ؟ وهـذا السؤال كثيراً ما نجد المناسبة للادلاء به لا سيا عند وضع المعادلات .

امارات التقدم

عندما كان كولمبس ورفاقه يمخرون عباب المحيط المجهول في طريقهم غرباً كانوا يبتهجون كلما رأوا طيراً . ذلك انهم كانوا يجدون في رؤية الطـير امارة تنبئهم بان اليابسة منهم قريبة . ولكنهم وجدوا اكثر من مرة انهم في هـذا يخطئون . فتطلعوا الى امارات اخرى وقدروا ان في اعشاب البحر الطافية وقطع السحاب المنخفضة ما قد ينبىء عن اقتراب اليابسة ، وفي هذا ايضاً كانوا مخطئين الا ان الامارات تلاحقت ذات يوم . فيوم الخميس ١١ تشرين الأول (اكتوبر) سنة ١٤٩٢ «رأوا طيراً رملياً وقصبة خضراء الى جوار السفينة ، ثم رأى الذين في الزورق الشراعي (بِنْتا) خيزرانة وقضيباً ثم هم التقطوا قضيباً آخر صغيراً فوجدوا فيه آثار النحت بالحديد . ثم ظهرت لهم قطعة خيزران اخرى ونبتة ارضية ولوح صغير . وكذلك ملاحو الزورق (نينا) رأوا اطيـاف اليابسة وغصناً صغيراً عليـه ثمار . فتنفسوا كلهم الصعداء وابتهجوا فرحاً بهـذه الامارات » . وفي اليوم التالي ظهرت لهم اليابسة حقاً - اول جزر العالم الجديد.

وبالمثل قد نكون نحن امام مشروع ما ، هام او قليل الاهمية ، امام مسألة من أي نوع . فاذا نحن حصرنا فكرنا فيها فاننا نترقب امارات التقدم كما كان كولمبس ورفاقه يترقبون علامات اليابسة . ولندرس امثلة يتبين منها ما يمكن ان نعتبره من الامارات الدالة على اقتراب الحل .

١ – **امثلة** : عندي مسألة في الشطرنج ، فعلي ان اميت الشاه الاسود بحركتين مثلا . وبين قطع الشطرنج حصان ابيض على مسافة بعيدة حتى ليبدو ان ليس له شأن . فما شأنه؟ لا اعرف الآن فلأرجيء الرد عن هذا السؤال الى حين. ثم اني بعد بضع محاولات أتنبه الى حركة جديدة تكشف لي ان الحصان الابيض له شأن في اللعبة فهذا يبعث في نفسي املا جديداً واعتبره امارة خير ، واقدر ان الحركة الجديدة قد تكون هي الحركة الصحيحة . فلماذا ؟

لأن مسالة الشطرنج اذا كانت مصوغة بشكل متقن فينبغي ألا يكون على اللوحة قطعة ليست ذات شأن ، ولذا يجب ان نأخذ بعين الاعتبار كل قطع اللوحة ، اي اننا نستعمل كل المعطيات . فالحل الصحيح اذن ينطوي على استعمال كل القطع حتى ذلك الحصان الابيض الذي بدا لنا كشيء لا يلزم . ومن هذه الناحية تتفق حركتي الجديدة مع الحل الصحيح . فهي تبدو لي كأنها حركة صحيحة ، ولعلها كذلك .

ومن الشيق ان ننظر في حالة مشابهة في مسألة رياضية . المطلوب ان نعبر عن مساحة المثلث بدلالة اضلاعه ا ، ب ، ج . ولنقل اننا توصلنا الى رسم خطة ما ، وتبين لنا الى حد ما من الوضوح اي العلاقات الهندسية ينبغي ان نأخذ بعين الاعتبار واي العمليات ينبغي ان نجري . ولكن لم يتأكد لدينا بعد اذا كانت طريقتنا ستنجح ام تفشل . ونمضي في طريقتنا هذه فنجد ان العبارة :

$$\sqrt{\text{ب} + \text{ج} - \text{أ}}$$

سترد في القانون الذي سنحصل عليه . ولهذا نبتهج . فلماذا ؟

لأن من المتوقع ان يدخل في حسابنا ان مجموع اي ضلعين في المثلث اكبر من الضلع الثالث . ففي هذا تحديد يشير الى أن الاضلاع لا يمكن ان تفترض اعتباطاً وان ب + ج يجب ان يكون اكبر من أ ، وهذا جزء رئيسي في الشرط ، ونحن ينبغي ان نأخذ كل اجزاء الشرط بعين الاعتبار ، فان لم يكن

ب + ج اكبر من أ فقانون مساحة المثلث قانون وهمي . وكذلك الجذر التربيعي للعبارة التي ذكرناها اعلاه يصبح كمية خيالية اذا كان ب + ج – أ سالباً أي اذا كان ب + ج اقل منأ . اي ان العبارة لاتعود صالحة لتمثيل كمية حقيقية تماماً في تلك الظروف التي فيها لا يعود القانون المطلوب يمثل شيئاً حقيقياً . فقانوني الذي يضم الجذر التربيعي لهذه العبارة يشترك مع القانون الصحيح في شيء هام . فهو اذن يشبه القانون الصحيح ، ولعله القانون الصحيح .

وهذا مثال آخر : اردت مرة ان ابرهن على نظرية في الهندسة المجسمة ، وبسهولة تنبهت الى امر بدا لي مناسباً . ولكني توقفت هناك . فقد كنت افتقد شيئاً بدونه لم استطع المضي ، ويئست يومئذ من اكتشاف الحل . ولكني توصلت الى فكرة عن البرهان كيف ينتظر ان يكون وعن النقص كيف ينتظر تلافيه – فكرة اوضح بكثير مما كنت احمله بادىء الامر ، وان كنت لم استطع ان اتلافى ذلك النقص . وفي اليوم الثاني بعد نوم مريح نظرت في المسألة من جديد، فتبادرت الى ذهني مسألة تقابلها في الهندسة المستوية ، وفي الحال ادركت انني وقعت على الحل . وكنت على ما اظن على حق . فلماذا ؟ لأن المقابلة دليل جيد ، وحل مسائل الهندسة الفراغية كثيراً ما يعتمد على حل مسائل تقابلها في الهندسة المستوية (انظر المقابلة ٣ – ٧) . وفي مسألتي هذه كنت اتوقع منذ البدء ان اجد البرهان المطلوب بالاعتماد على نظرية اسلم بها من الهندسة المستوية . وهذه ما تبادرت الى ذهني حقاً ولذا قلت : « ان هذه النظرية تبدو وكأنها هي التي اريد . فلعلها هي النظرية المساعدة التي احتاجها » .

ولو ان كولمبس ورفاقه وصفوا ما كان يدور بخلدهم لجاء وصفهم مماثلا لما تقدم . فقد كانوا يعرفون كيف يكون البحر قرب الشاطىء ويعرفون ان الطيور تظهر اكثر قرب الشاطىء منها في عرض المحيط ، وان المكان القريب من الشاطىء تحلق في سمائه طيور اليابسة وتحمل مياهه ما تنتزعه من الساحل. ولا بد ان كثيراً منهم لاحظوا ذلك في رحلاتهم السابقة اثناء عودتهم الى شواطئهم . فقبل ذلك اليوم التاريخي الذي اطلع عليهم جزيرة سان سلفادور ، عندما تكاثرت الاشياء الطافية على سطح الماء لا بد انهم قالوا في انفسهم :

« يبدو كأننا نقترب من اليابسة ، فلعلنا نقترب منها فعـلاً » ، ولذا « تنفسوا كلهم الصعداء وابتهجوا فرحاً بهذه الامارات » .

٢ **الهورستيكية في امارات التقدم :** لنذكر مرة اخرى نقطة ان تكن قد اتضحت للجميـع فان لها اهمية تبرر ان نتناولها بمزيد من التوضيـح .

فطراز التفكير الذي شرحناه بالامثلة السابقة يستحق ان يراعى ويؤخذ مأخذ جد رغم انه يؤدي الى اثارات استصوابية لا حقائق اكيدة . فلنتناول احـــد الامثلة السابقة بتفصيل زائد وببعض الحذلقة :

اذا كنا نقترب من اليابسة فكثيراً ما نرى الطيور .

ونحن الآن نرى الطيور .

اذن فلعلنا نقترب من اليابسة .

هذا كلام معقول ولكن بدون « لعلنا » تصبح القضية خطأ بالتأكيد .

والواقع ان كولمبس ورفاقه رأوا الطيور عدة مرات ولكنهم كانوا بعدهـا يستشعرون الخيبــة حتى جاء اليوم الذي فيـــه رأوا الطير الرملي وعقبه يوم الاكتشاف .

وبلفظة « لعلنا » تصبح القضية معقولة طبيعية ولكنها لا تعتبر برهاناً اكيداً صحيحاً أو أمراً واقعاً . انها ما زالت مجرد اثارة تقدير هورستيكي . ومن الخطأ ان ننسى انها احتمال لم يبلغ مبلغ اليقين . ولكن خطأ أكبر ان نتجاهلها بالمرة . فاذا انت وضعت النتيجة الهورستيكية موضع التأكيد منيت بالسخرية والفشل . ولكن اذا انت تجاهلتها اطلاقاً فلن تتقدم أبداً .

وان أهم امارات التقدم امارات هورستيكية . فهل نثق بها ؟ هل نسايرها؟ سايرها وافتح عينيك ؛ ثق بهـا ولكن انظر حواليك . واياك ان تتخلى مرة عن ملكة التمييز عندك .

٣ - **الامارات الصريحة :** لننظر في الامثلة السابقة من ناحية اخرى .

ففي احد هذه الامثلة كانت العلامة السارة اننا نجحنا في استعمال واحدة من المعطيات لم نكن قبلاً نعرف كيف نستعملها (الحصان الابيض) . وكنا على حق باعتبارها بشرى خير . فحل اي مسألة هو في الحقيقة ايجاد الرابطة بين المعطيات والمجهول . وفي المسائل المتقنة الصياغة ينبغي ان نستعمل كل المعطيات فنربطها جميعاً بالمجهول ونجاحنا في ادخال احدى المعطيات المستعصية في حسابنا يحق لنا ان نعتبره تقدماً وخطوة الى الامام .

وفي مثال آخر اعتبرنا البشرى السارة ان جزءاً من اجزاء الشرط الرئيسية فرض نفسه على القانون الذي حصلنا عليه . وكنا على حق في اعتباره بشرى سارة . فنحن ينبغي ان نستعمل الشرط كله . ونجاحنا في ادخال احد اجزائه في حسابنا يحق لنا ان نعتبره تقدماً وخطوة في الاتجاه الصحيح .

وفي مثال آخر اعتبرنا امارة التقدم اكتشافنا المسألة المقابلة السهلة . وهذا ايضاً له ما يبرره . فالمقابلة من مصادر الاكتشاف الرئيسية . وعندما يتعذر علينا ايجاد حل ينبغي ان نتخيل مسألة مقابلة ، فاذا انحدرت الى مخيلتنا من تلقاء نفسها وبدون جهد مسألة من هذا النوع فمن حقنا ان نشعر بالابتهاج ، ذلك اننا نشعر ان قد شارفنا الحل .

والآن يسهل ان ندرك فكرة عامة : فهناك عمليات ذهنية نموذجية تفيد في حل المسائل (والعمليات المألوفة من هذا النوع مدرجة في هذا الكتاب) . وعندما تنجح احدى هذه العمليات النموذجية (كربط احدى المعطيات بالمجهول ، أو ادخال احد اجزاء الشرط في حسابنا ، او ظهور مسألة مقابلة سهلة) فنجاحها يعتبر امارة تقدم . فاذا فهمنا هذا يصير باستطاعتنا ان نشير الى امارات اخرى للتقدم . فما علينا الا ان نقرأ الثبت ، وننظر في الاسئلة والتوجيهات من هذه الناحية الجديدة .

ففهم طبيعة المجهول فهماً واضحاً من امارات التقدم ، وتعريف المعطيات المختلفة بحيث نستطيع ان نعالج أياً منها بسهولة يعني ايضاً تقدماً ، وتخيل الشرط

كمجموع تخيلاً جلياً قد يعني تقدماً كبيراً وفصل الشرط اجزاء مناسبة قد يعني خطوة واسعة الى الامام . وعندما نجد شكلاً يسهل ان نتخيله او ترقيماً يسهل ان نميزه فلنا ان نعتقد اننا تقدمنا بعض التقدم . وعندمـــا نتذكر مسألة ذات صلة بمسألتنا مما حللناه من قبل ففي ذلك خطوة حاسمة في الاتجاه الصحيح ... وهكذا وهكذا ، فكل عملية ذهنية اذا تمت بنجاح ترافقها امارةتقدم صريحة. وثبتنا اذا هو فهم الفهم الكافي هو ايضاً ثبت بامارات التقدم . واسئلة الثبت وتوجيهاته ، سهلة ظاهرة من الادراك الفطري الصراح ، وهذا ما ذكرناه مرات كثيرة . وهذا نفسه ينطبق على امارات التقدم التي ترتبط به كما سبق وصفه ، فرؤية اية امارة من هذه الامارات ليست اذن ضرباً من العرافـــة بل هي من الادراك الفطري مؤيداً بقليل من الخبرة .

٤ – **امارات غير صريحة** : عندما ننصرف الى عملنا نستشعر بوضوح خطى تقدمنا . فعندما نتقدم بخطى حثيثة نزهو ونبتهج وعندما تتباطأ خطانا نقلق ونبتئس . ونحن نستشعر هذا بوضوح من غير ان نقدر علىتميز امارات واضحة. فأحوالنا النفسية وشعورنا ووجهة نظرنا العامة نحو الموقف علامات تقدر مدى تقدمنا . ولكن لا يسهل وصفها . والرجل الساذج يعبر عن ذلك بقوله « انيعلى ما يرام » او « لست على ما يرام ». اما غير السذج فلهم تعبيرات أرهف:« هذه خطة متزنة » او « لا فثمة شيء مفقود يجعل النغمـــة نشازاً » . ووراء تلك التعبيرات الساذجة او هذه الاوصاف الغامضة شعور غير خاطىء اذا نحنتتبعناه بثقة فهو يقودنا غالباً في الاتجاه الصحيح . واذا بدا هذا الشعور قوياً وقام في ذهننا فجأة فذلك الهام ، والناس عادة قلما يخطئون الهاماتهم رغم انها كثيراً ما تورطهم . والحق اننا ينبغي ان نقف من مشاعرنا الهادية والهاماتنا تماماً كما نقف من امارات التقدم الصريحة التي سبق وصفها ، فنوليها ثقتنا ولكن نفتح عيوننا .

سر وراء الهامك ، ولكن ببعض الحذر .

(وما هي طبيعة هذه المشاعر الهادية ؟ وهل هناك معنى اوضح وراء تلك الاوصاف الغامضة من امثال « خطة متزنة » او « نغمة نشاز » ؟ ربما كانت هذه اسئلة تأملية اكثر منها عملية . ولكننا في هذا الصدد نجد اجوبة قد تستحق ان تذكر . فما دامت أمارات التقدم الصريحة ترتبط مع النجاح او الفشل في عمليات ذهنية محددة فلنا ان نشتبه في ان هذه المشاعر الهادية المستترة ترتبط بالمثل مع عمليات ذهنيـــة اخرى اقل وضوحاً . ولعلها عمليات « نفسية » اكـــثر و « منطقية » اقل) .

٥ – **كيف تساعدنا الامارات :** عندي خطة . وأنا أرى بوضوح من اين ابدأ وبأي الخطوات أشرع ولكني لا أستطيـع ان أرى طبيعة الطريق فيما وراء ذلك . ولست واثقاً من ان خطتي ستنجح . والطريق أمامي طويـل على كل حال . فأنا اسير في خطتي بحذر واتطلع في سبيلي الى امارات التقدم . فـــاذا كانت هذه الامارات نادرة او غير بينة ينتابني التردد . واذا هي لم تتبدّ لي على مدى طويل فقد تفتر عزيمتي وادير ظهري بحثاً عن سبيل آخر . اما اذا تواترت الامارات كلما تقدمت في سبيلي وتكاثرت ، فترددي يزول ومعنوياتي ترتفـــع وثقتي تتزايد ، كما جرى لكولمبس ورفاقه قبيل رؤيتهم جزيرة سان سلفادور .

ان ظهور العلامات قد يوجهنا ، واختفاؤها قد ينبؤنا باننا في درب مغلق ويوفر علينا جهداً ضائعاً ، وظهورها قد يدفعنا الى تركيز جهودنا على النقطة المناسبة .

ولكن العلامات قد تخدع . فقد تخليت يوماً عن طريق لم أجد فيه العلامات ولكن شخصاً مضى بعدي في ذلك الطريق فعثر على اكتشاف هـــام وأورثني سخطاً كبيراً وأسفاً دائماً . ولم يكن صبوراً اكثر مني فحسب بل قد استطاع ايضاً ان يرى امارة معينة عجزت عن تبينها . وكذلك قـــد اسير في طريقي مرحاً تشجعني العلامات السارة فاذا بي أقع فجأة امام عقبة كأداء لم تكن في الحسبان .

أجل . فالامارات قد تضللنا في حالة ما الا انها تهدينا في معظم الحالات . فالصياد قد يخطىء بين الحين والحين في تعقب صيده ولكنه بوجه الاجمال يصيب والا لما جعل من صيده مورداً لرزقه .

ولتفسير الامارات تفسيراً صائباً نحتاج الى خبرة فبالخبرة عرف بعض رفاق كولمبس كيف يكون البحر قرب الشاطىء وهكذا فسّروا الامارات التي دلتهم على اقترابهم من اليابسة . والخبير يعرف بخبرته دلائل موقفه ويشعر عند اقتراب الحل شعوراً يجعله قادراً على تفسير الامارات التي تدل على ان الحل قريب . والخبير يعرف من الامارات اكثر مما يعرف قليل الخبرة وهو يعرفها معرفة اتم ، ولعل ميزته الوحيدة ان له هذه المعرفة . فالصياد الخبير يدرك من آثار الصيد ويميز من جديدها وقديمها ما لو رآه قليل الخبرة لما تبين فيه شيئاً .

وميزة أرباب المواهب هي في ان لهم ضرباً من الاحساس الذهني الغريب . فهم بهذا الاحساس المرهف يستشعرون علامات التقدم الدقيقة او يستشعرون فقدانها حيث لا يشعر من ليس لهم هذه الموهبة بشيء .

٦ – **الاستنتاج القياسي الهورستيكي** : في الملاحظة ٢ رأينا طرازاً من التفكير الهورستيكي يستحق ان نوليه مزيداً من الاهتمام وان نعطيه اسماً تقنياً . فلنعد ذكر ذلك بشكل جديد :

اذا كنا نقترب من اليابسة فاننا كثيراً ما نرى الطيور .

ونحن الآن نرى الطيور .

اذن فقد صار ادعى للتصديق اننا نقترب من اليابسة .

فالجملتان اللتان فوق الخط نسميها المقدمتين والجملة التي تحته النتيجة وهذا الطراز الاستنتاجي كله نسميه بالاستنتاج القياسي الهورستيكي .

وقد ذكرنا المقدمتين هنا كما في ٢ ولكن النتيجة صيغت بعناية اكبر فأكدت

امراً جوهرياً . فان كولمبس ورفاقه كانوا منذ البدء يحسبون انهم اذا ابحروا غرباً فسيجدون اليابسة . ولا شك انهم عولوا على هذا الظن إلى حد ما والا لما مضوا في رحلتهم ابداً . وهم في ابان سيرهم كانوا يربطون كل حادث كبير او صغير بسؤالهم هذا الذي يملك عليهم كل تفكيرهم : « هل نحن نقترب من اليابسة ؟ » وكانت ثقتهم بذلك تعلو وتهبط حسب وقوع الحوادث او انقطاعها . وكان ايمان كل منهم في تأرجحه يعتمد على بيئته وشخصيته الخاصة . وان كل ما رافق رحلتهم تلك من توتر وانفعالات انما سببه هذا التأرجح في ثقتهم . والاستنتاج القياسي الهورستيكي الذي ذكرناه يعطي اساساً معقولاً لاحداث تغيير في مستوى هذه الثقة . وان احداث هذا التغيير هو الدور الاساسي الذي يلعبه هذا الضرب من الاستنتاج وهذه النقطة يعبر عنها النص المذكور هنا احسن مما جاء في الملاحظة ٢ .

والنموذج العام الذي اقترحه مثالنا يمكن ان نعرضه بشكل جديد :

اذا صح أ يصح ب ، كما نعرف .

والآن نرى ان ب صحيح .

اذن صار ادعى للتصديق ان أ صحيح .

وبصورة اوجز :

اذا صح أ يصح ب

ب صحيح

أ ادعى للتصديق

وفي هذه الصورة يقوم الخط مقام كلمة « اذن » ويعبر عن الرابطة الرئيسية بين المقدمتين والنتيجة .

[٧ - **طبيعة الاستنتاج الاستصوابي** : اننا في هذا الكتيّب نناقش مسألة فلسفية ، ونحن ، بقدر ما نستطيع ، نناقشها بصورة عملية بعيداً عن الشكليات وبعيداً عن اساليب التعبير التي يجنح اليها ذوو الجباه العالية . ولكن موضوعنا

رغم ذلك فلسفي . انه يبحث في طبيعة الاستنتاج الهورستيكي وينشر بساطه على ضرب من التفكير غير يقيني ولكنه هام ونحن نسميه ، ما دمنا لا نجد له اسماً سابقاً ، بالاستنتاج الاستصوابي .

فالامارات التي تدل المبتكر على ان فكرته جيدة والدلائل التي تهدينا في اليومية والبينات الاستنتاجية عند رجال القانون والحجج الاستقرائية عند رجال العلم ، والادلة الاحصائية المعتمد عليها في شتى الموضوعات كل ذلك بينات تتفق في امرين : اولهما ان ليس فيها اليقين القاطع وثانيهما انها تفيد في الحصول على معلومات جديدة بالمرة بل هي لا غنى عنها في المعرفة خارج الرياضيات والمنطق النظريين ، في المعرفة التي تختص بعالمنا الفيزيائي . ونستطيع ان نسمي هذا الطراز الاستنتاجي الذي تنطوي عليه هذه البينات بالاستنتاج الهورستيكي او الاستنتاج الاستقرائي ولكننا (تجنباً لتوسيع معاني الاسماء المعروفة) نسميه بالاستنتاج الاستصوابي . وعلى هذا سرنا في بحثنا .

والاستنتاج القياسي الهورستيكي السابق يمكن اعتباره اسهل وابسط نماذج الاستنتاج الاستصوابي وهو يذكرنا بطراز كلاسيكي من الاستنتاج اليقيني فلنضعهما جنباً بجنب :

المنطق الكلاسيكي	المنطق الهورستيكي
اذا صح أ يصح ب	اذا صح أ يصح ب
ب خطأ	ب صحيح
أ خطأ	أ أدعى للتصديق

ومقارنة هذين النموذجين لا تخلو من فائدة . فهي تتيح لنا ما لا يتيحه غيرها من فرصة نسبر فيها غور الاستنتاج الاستصوابي (الهورستيكي او الاستقرائي) .

فالنموذجان يتفقان بالمقدمة الاولى : اذا صح أ يصح ب .

وهما يختلفان بالمقدمة الثانية : ب خطأ ؛ ب صحيح ،

فهما هنا متضادان ولكن المقدمتين من « طبيعة منطقية واحدة » ومن « مستوى منطقي واحد » والفرق الاكبر نجده في النتيجتين :

أ خطأ   أ أدعى للتصديق

فهاتان من مستويين منطقيين مختلفين وعلاقة كل منهما بمقدمتيه من طراز منطقي خاص فنتيجة القياس اليقيني ومقدمتاها من مستوى منطقي واحد وهي قضية كاملة التعبير ، تؤيدها مقدمتاها كل التأييد . فاذا اتفقت وجاري على المقدمتين فلن يكون بيننا اختلاف معقول من حيث النتيجة مهما تباينت اذواقنا ومعتقداتنا الأخرى .

أما نتيجة القياس الهورستيكي فتخالف مقدمتيها بطبيعتها المنطقية فهي اكثر غموضاً وهي غير قاطعة وعبارتها غير كاملة وهي كالقوة ذات مقدار وذات اتجاه . انها تقودنا في اتجاه معين : أ يصير ادعى للتصديق . ولها ايضاً قوة ما : أ يصير ادعى كثيراً للتصديق ، او أ يصير ادعى قليلاً للتصديق . وهي ليست قاطعة العبارة ، وليست مؤيدة تأييداً كاملاً بمقدمتيها . فهي تعبر عن اتجاهها واتجاهها مضمر بالمقدمتين ، اما قوتها فليست كذلك . فكل عاقل يجد من المقدمتين ان أ يصير أدعى للتصديق ، لا ابعد عن التصديق بالتأكيد .ولكني قد اختلف مع جاري حول مدى ذلك حسب اختلاف امزجتنا وبيئتنا وأسباب كامنة في نفوسنا .

وفي القياس اليقيني تؤلف المقدمتان اساساً كاملاً تقوم عليه النتيجة ، فاذا صحت المقدمتان صحت النتيجة واذا جدت لدينا معلومات لا تزعزع المقدمتين فالنتيجة لا تتزعزع .

اما نتيجة القياس الهورستيكي فمقدمتاها جزء من الاساس الذي ترتكز عليه — الجزء الصريح الظاهر . ولكن ثمة جزء مضمر خفي يتكون من شيء

آخر ، ربما من شعور غير موصوف او أسباب غير مذكورة . وقد يحدث ان تجد لدينا معلومات لا تمس المقدمتين ولكنها تزعزع ثقتنـا في أ بشكل يناقض النتيجة فلئن نرى الى ان أ تصير أدعى للتصديق على اساس المقدمتين أمر يقبله العقل الآن ، ولكن قد نجد في غد اسباباً لا تعارض المقدمتين في شيء ولكنها تقلل ثقتنا بالنتيجة او تدعو الى نقضها كلية . فهي قد تتزعزع او تنهار تحت وطأة تلك الاجزاء الخفيـة من اساسها رغم ان مقدمتيها ، الاساس الظاهر ، تبقيان بأمان .

وهذا يقرب الى الفهم طبيعـة بعض انواع الاستنتاج الاستصـوابي ، كالهورستيكي والاستقرائي ، التي تبدو محيرة اذا نحن نظرنا اليها من وجهة نظر المنطق اليقيني البحت .

ويبدو ان هذا البحث الذي اوردناه هنا ينبغي تكملته بمزيـد من الامثلة ودراسة لانواع اخرى من المنطق الهورستيكي وبحث في مبادىء الاحتمال الى غير ذلك من المفاهيم ذات العلاقـة . فنرجع القارىء الى كتابنا : الرياضيات والاستنتاج الاستصوابي (Mathematics and Plausible Reasoning) .]

ان الاسباب الهورستيكية ذات اهمية رغم انها لا تثبت شيئاً بصورة قاطعة . وتوضيح كل سبب هورستيكي أمر هام ايضاً رغم ان وراء كل سبب نوضحه اسباباً عدة تبقى غامضة وربما كانت هي الاهم .

انظر الى المجهول :

هذه نصيحة قديمة يقابلها في الامثال اللاتينيـة : « Respice finem » . ونعبر عنها باشكال شتى : انظر الى الخاتمة ؛ تذكر هدفك ؛ لاتنس غايتك ؛ فكر فيما تريد الحصول عليـه ؛ لا تصرف النظر عن مطلوبك ؛ لا تحول نظرك عما تبحث عنه ؛ انظر الى المجهول ؛ انظر الى المطلوب . والشكلان الاخيران يلائمان مسائل الايجاد ومسائل الاثبات على الترتيب .

فتركيز النظر على الهدف الذي نسعى اليه وتركيز الاهتمام في الغاية التي نرمي

اليها يساعدانا في تلمس السبل والوسائل للحصول عليها . ما السبيل الى تحقيق الهدف ؟ كيف تصل الى غايتك ؟ كيف يمكن أن تحصل على نتيجة من هذا النوع ؟ ما الذي يؤدي الى مثل هذه النتيجة ؟ اين رأيت مثل هذه النتيجة من قبل ؟ ماذا يصنع عادة للحصول على هذه النتيجة ؟ حاول ان تبحث عن مسألة تعرفها فيها هذا المجهول او مجهول يشبهه . حاول ان تفكر في نظرية تعرفها فيها هذا المطلوب او مطلوب يشبهه . وهذان الاخيران يلائمان ايضاً مسائل الايجاد ومسائل الاثبات على الترتيب .

١ — ولننظر الآن في مسائل الايجاد الرياضية وصلتها بالتوجيه : حاول أن تتذكر مسألة تعرفها فيها هذا المجهول . ولنقارن هذا بالتوجيه الذي ينطوي عليه السؤال : هل تعرف مسألة ذات صلة بمسألتك ؟

فالتوجيه الأخير أعم من الأول . ذلك ان المسألة ترتبط بمسألة اخرى اذا كان بينهما شيء ما مشترك ، كأفكار مشتركة أو معطيات مشتركة او أجزاء من الشرط مشتركة او غير ذلك . أما التوجيه الأول فينصب على ناحية معينة هي الاشتراك بالمجهول . أي أن المجهول يجب ان يكون في الحالتين من جنس واحد كأن يكون طول خط مستقيم مثلاً .

وهذا التوجيه اذا قارناه بالتوجيه الأعم نجد فيه ضرباً من التوفير .

فنحن نوفر جهداً في تذكر المسألة ، فلا ننظر في المسألة كلها بل في مجهولها ونرى أنها ينبغي ان تكون مثلاً من النوع : « اذا أُعطيت ...... فما طول الخط المستقيم ؟ »

ثم هنالك توفير في مجال الاختيار . فكثيرة جداً المسائل التي قد تكون ذات صلة بمسألتنا ، مشتركة معها في نقطة ما . ولكننا اذ نحصر النظر في المجهول نحدد مجال الاختيار فلا نعتبر الا مسائل لها هذا المجهول . ونحن بالطبع نبدأ من هذه المسائل بأسهلها ، وبالتي نعرفها اكثر من غيرها .

٢ — المسألة التي أمامنا من النوع :

« اذا اعطيت .... فما طول الخط المستقيم ؟ »

فأسهل المسائل التي من هذا النوع ، والتي نعرفها اكثر من غيرها ، تتعلق بالمثلث : اذا اعطيت ثلاثة من عناصر المثلث فأوجد طول ضلع فيه . فعندما نتذكر هذا نكون قد عثرنا على شيء قد يتعلق بالمسألة . فهنا مسألة ذات صلة بمسألتك وقد حلت من قبل فهل يمكنك أن تستعملها ؟ هل يمكنك ان تستعمل نتيجتها ؟ ولكي تستعمل النتائج التي تعرفها عن المثلث يجب ان يكون في الشكل أمامك مثلث . فهل فيه مثلث ؟ أم هل يلزم ان تدخل فيه مثلثاً كي تفيد من هذه النتائج المعروفة ؟ هل يلزم ان تدخل عنصراً مساعداً جديداً كي يمكنك استخدامها ؟

وهناك عدة مسائل سهلة يكون المجهول فيها ضلع مثلث . (وهي تختلف بعضها عن بعض بالمعطيات : فقد نعطي زاويتين وضلعاً أو ضلعين وزاوية ، ثم ان موضع الزاوية من الضلعين المعطيين قد يختلف ؛ ثم ان كل هذه المسائل تكون أسهل اذا كان المثلث قائماً) . فبتركيز الانتباه على المسألة التي أمامنا نبحث عن نوع المثلث الذي ندخله وعن اي مسألة مما حللناه من قبل (بالمجهول نفسه) نجدها انسب لنا في الحالة الحاضرة .

وبعد ان ندخل المثلث المساعد المناسب قد نجد اننا لا نعرف بعد عناصره الثلاثة . ولكن هذا ليس ضرورياً دائماً . فاذا نحن وجدنا ان العناصر المفقودة ، يمكن الحصول عليها بطريقة ما نكون قد تقدمنا في الحل تقدماً جوهرياً ، ونكون قد عثرنا على خطة للحل .

٣ – والأجراء الذي رسمناه فيما سبق (١ ، ٢) يجلوه القسم ١٠ (جلاء ينقص من قيمته بعض الشيء بطء الطلاب) . وليس من الصعب اضافة المزيد من الامثلة . والواقع ان حل معظم مسائل الايجاد التي تعطى في غير مراحل الدراسة العالية يمكن ان تبدأ بالاستعمال المناسب للتوجيه : حاول ان تفكر في مسألة تعرفها لها هذا المجهول او مجهول يشبهه .

فلنأخذ هذه المسائل بشكل منظم وننظر فيها الى المجهول اولاً :

(١) اذا اعطيت . . . . فأوجد طول الخط .

(٢) اذا اعطيت . . . . فأوجد الزاوية .

(٣) اذا اعطيت . . . . فأوجد حجم الهرم الثلاثي .

(٤) اذا اعطيت . . . . فعين النقطة .

اذا كان لدينا بعض الخبرة في معالجة المسائل الرياضية الابتدائية فستتذكر بسهولة مسألة او مسائل بسيطة نعرفها لها ذات المجهول . أما اذا كانت المسألة المعطاة ليست من هذه المسائل البسيطة المعروفة فطبيعي أن نحاول الاستفادة مما نعرفه وان نستخدم نتائجه فندخل شيئاً مفيداً نعرفه في المسألة وهذا قد يهيىء لنا بداية طيبة .

وفي كل من الحالات الاربع التي ذكرناها اعلاه نجد خطة ظاهرة وتقديراً معقولاً لسير طريقة الحل .

(١) — نحصل على المجهول كضلع من اضلاع مثلث فعلينا ان ندخل المثلث المناسب بعناصر ثلاثة معروفة أو يسهل ايجادها .

(٢) — نحصل على المجهول كزاوية في مثلث فعلينا ان ندخل المثلث المناسب .

(٣) — نحصل على المجهول اذا عرفنا مساحة القاعدة والارتفاع فعلينا ان نعرف مساحة أحد الوجوه ومقدار الارتفاع النازل عليه .

(٤) — نحصل على المجهول كنقطة تقاطع محلين هندسيين كل منهما اما دائرة أو خط مستقيم فعلينا ان نستخلص هذين المحلين الهندسيين من المسألة .

وفي كل هذه الحالات نجد خطة توحي بها مسألة بسيطة فيها هذا المجهول

ويؤدي اليها رغبتنا باستخدام نتيجتها او طريقتها . ولكنا حين نسير في هذه الخطة قــد نجابه طبعاً صعوبات ولكن لدينا فكرة للبدء وهذا مربح كبير على كل حال .

٤ – ولسنا نجد مثل هذا المربح اذا لم نجد مسألة سبق حلها فيهــا مجهول يشبه مجهول المسألة التي أمامنا . وهنا نجد صعوبة كبيرة في حل المسألة .

« أوجد مساحة سطح كرة اذا عرف نصف قطرها » . هذه مسألة حلها ارخميدس . وقد لا نجد لدينا مسألة أسهل منها بهذا المجهول . ولم يجد ارخميدس ايضاً بالتأكيد مسألة اسهل منهــا يمكن ان يستعملها . وهذا ما يجعـل حل ارخميدس للمسألة واحداً من ابرز الاعمال الرياضية .

« اوجد مساحة الكرة المرسومة داخـل الهرم الثلاثي اذا عرفت أطوال حافاته الست » .

اذا كنا نعرف نتيجة ارخميدس فلسنا نحتاج الى عبقريته لحل هذه المسألة ، اذ لا يبقى علينا الا أن نعـبر عن نصف قطر الكرة بدلالة اطوال الحافات . وهذا ليس سهلاً ولكن صعوبته لا تقارن بصعوبة مسألة ارخميدس .

فان معرفة او عدم معرفة مسألة سبق حلها بالمجهول نفسه قـد تنطوي على كل فرق بين المسألة السهلة والمسألة الصعبة .

٥ – عندما وجد ارخميدس مساحة سطح الكرة لم يكن يعرف ، كما ذكرنا ، اي مسألة سبق حلها لها هذا المجهول . ولكنه كان يعرف عدداً من المسائل لها مجهول يشبهه . فثمة عدة سطوح منحنية كان ايجاد مساحاتها أسهل وكانت معروفة معرفة جيدة في ايام ارخميدس ، كالمساحة الظاهرية للاسطوانة الدائرية القائمة والمخروط الدائري القائم وقطعة هذا المخروط . ولنا ان نعتقد يقيناً أن ارخميدس قد نظر بعناية في هذه المسائل . فهو في حله يستعمل تقريباً لمساحـة الكرة على أنها جسم مركب من مخروطين وعدة قطع مخروطيـــة (انظر التعريف ، ٦) .

اذا عجزنا عن ايجاد مسألة سبق حلها لها ذات المجهول الذي في المسألة المعطاة لنا فلنحاول ان نجد مسألة لها مجهول يشبهه . والمسائل التي من هـذا النوع تكون اقل صلة بمسألتنا من مسائل النوع الاول وهي من ثم لا يسهل كثيراً استخدامها للغرض الذي نتوخاه ولكن قد يكون لها قيمتها كدليل على كل حال .

٦ - واليك الآن بضع ملاحظات تتعلق « بمسائل البرهان » . انها تقابل الملاحظات المفصلة السابقة عن « مسائل الايجاد » .

انك تعطي نظرية بعبارة صريحة واضحة وعليك ان تبرهن على صحتها أو بطلانها . فأي نظرية برهنت عليها في الماضي مما يتعلق بصورة ما بالنظرية المعطاة لك قد تكون ذات فائدة الا اننا نتوقع الفائدة الاكبر من النظريات التي لها نفس المطلوب الذي للنظرية التي امامك . فاذا عرفت ذلك فانظر الى المطلوب اي انظر في مسألتك ودقق النظر في المطلوب ، وطريقة النظر الى المسألة يمكن التعبير عنها بالشكل التالي : « اذا كان .... فالزوايا متساوية »

وهذا يوجه انتباهنا نحو المطلوب فنحاول ان نتذكر نظرية نعرفها لها هذا المطلوب او مطلوب يشبهه ونحاول بشكل خاص ان نتذكر نظرية سهلة من هذا النوع .

ففي الحالة السابقة نجد عدة مسائل من هذا النوع فقد نتذكر مثلاً : « اذا تطابق مثلثان كانت زواياهما المتناظرة متساوية » . فهنا نظرية ذات صلة بنظريتك وقد برهن عليها من قبل . فهل يمكنك ان تستعملها ؟ هل يلزم ان تدخل عنصراً مساعداً يجعل استعمالها ممكناً ؟

فبهذه التوجيهات وبمحاولتنا ان نحكم على الفائدة التي قد نجنيها من النظرية التي تذكرناها قد نحصل على خطة ما مثلاً اثبات تساوي زوايا معينة عن طريق تطابق مثلثين . فهنا علينا ان ندخل مثلثين يحويان هذه الزوايا ونثبت تطابقهما.

وهذه خطة جيدة حتماً كنقطة ابتداء وقد تؤدي نهائيـــاً الى المطلوب كما في القسم ١٩ .

٧ – ولنجمل ما تقدم : اذا تذكرنا مسائل سبق حلها لها نفس المجهول او مجهول يشبهه (او نظريات سبق اثباتها لها نفس المطلوب او مطلوب يشبهه) فلنا امل واسع في بداءة صائبة وقد يؤدي ذلك الى اكتشاف خطة للحل . وفي الحالات البسيطة ، وهي الاعم في المراحل الابتدائية تكون اسهل المسائل التي لها نفس المجهول (او النظريات التي لها نفس المطلوب) كافيـــة على الغالب . ومحاولة تذكر مسألة لها نفس المجهول خطة بديهية ظاهرة (قارن ما قيل في هذا الصدد في القسم ٤) . ولكن الغريب ان هذه الخطة السهلة المفيدة ليست واسعة الانتشار . ويخيل الى المؤلف انها لم تذكر من قبل بشكل عام شامل . إلا ان اساتذة الرياضيات وطلابها لا يستطيعون انكار الفائــدة في الاستعمال المناسب للتوجيه : انظر الى المجهول وحاول ان تفكر في مسألة تعرفها لها هــذا المجهول أو مجهول يماثله .

بابس :

رياضي يوناني كبير عاش على الغالب حوالي ٣٠٠ م . وله كتـــاب (Collectiones) نجـــده في الجزء السابع منه يتكلم عن موضوع يسميه (Analyomenos) يمكن ان نترجمه الى « تحليليات » ، او « فن حل المسائل» او « الهورستيكا » . ونحن نفضل هنا الترجمـــة الاخيرة . وتحت متناول يدنا ترجمة جيدة (الى الانجليزية)* لما كتب بابس واليك ما قاله مترجماً عن الأصل بتصرف :

« ما نسميه بالهورستيكا هو باختصار مجموعة قواعد تهم اولئك الذين يرغبون

---

* T.L. Heath : The Thirteen Books of Euclid's Elements, Cambridge, 1908, Vol. I, p. 138.

بعد دراسة « الاصول» ان يكتسبوا المقدرة على حل المسائل الرياضية ، وفائدته تنحصر في هذه الغاية . وقد وصفه ثلاثة رجال هم اقليدس واضع كتاب الاصول وابلونيوس البرجاوي ، وأرستايوس الكبير . وهو يشرح طرق التحليل والتركيب .

« ففي التحليل نبدأ من المطلوب فنسلم به ونستنتج من النتائج نتائج اخرى حتى نصل الى نقطة يمكن ان نتخذها مبدأ للتركيب . اي اننا في التحليل نعتبر ما يطلب عمله انه قد عمل (ما يطلب ايجاده انه قد وجد وما يطلب اثباته انه قد ثبت) ثم نتساءل : من اي شيء يمكن ان ينتج ذلك ثم من اي شيء يمكن ان ينتج هذا الشيء وهكذا ننتقل من شيء الى شيء حتى نقع على شيء سبق معرفته او مسلم بصحته . وهذا الاجراء نسميه التحليل او الحل المعكوس او الاستنتاج القهقري .

« ونسير على عكس هذا الاجراء في التركيب فنبدأ من آخر نقطة انتهى بها التحليل ، مما سبق معرفته او سلمنا بصحته . ومنه نستنتج الخطوة التي سبقته ونستمر في استنتاجاتنا حتى نصل بتعقب خطوات التحليل عكسياً الى المطلوب. وهذا الاجراء نسميه التركيب او الحل الانشائي او الاستنتاج التقدمي .

« والتحليل نوعان : احدهما تحليل مسألة الاثبات وغايته اثبات النظريات الصحيحة ، والثاني تحليل مسألة الايجاد وغايته ايجاد المجهول .

« ففي مسألة الاثبات نعطي نظرية ما أبمنطوق واضح ويراد منا اثبات صحتها او بطلانها . ونحن لا نعرف بعد هل هي صحيحة ام مخطوءة . ولكننا نستنتج منها نظرية اخرى ب ومن ب نظرية اخرى جـ وهكذا حتى نصل الى نظرية اخيرة ل نعرف عنها شيئاً اكيداً . فاذا كانت ل صحيحة كانت أ صحيحة شرط ان تكون الاستنتاجات كلها قابلة للتحول . فمن ل نبرهن على صحة النظرية ك التي سبقتها في التحليل ، وهكذا نتعقب خطواتنا رجوعاً ، فمن جـ نبرهن على ب ومن ب نبرهن على أ .

وهكذا يتم لنا المطلوب . أما اذا كانت ل خاطئة فتكون أ خاطئة ايضاً .

« وفي مسالة الايجاد ، يراد منا ان نجد مجهولاً ما س يحقق شرطاً معيناً .ولا ندري بعد هل هنالك ما يحقق هذا الشرط ام لا ولكننا نعتبر ان س تحققه ثم نستنتج منها مجهولاً آخر ص يحقق شرطاً ينجم عن الشرط الأول ثم نربط المجهول ص بمجهول آخر وهكذا حتى نصل الى مجهول اخير ع نستطيع ان نحصل عليه بطريقة معروفة . فاذا لقينا المجهول ع الذي يفي بشرطه نجد المجهول س الذي يفي ايضاً بشرطه على ان تكون الاستنتاجات كلها قابلة للتحول . فنجد اولاً ع ومنها نجد المجهول الذي يسبق ع في عملية التحليل وهكذا نعـــود القهقرى فنجد ص ومنها نجد س فنحصل على المطلوب . أما اذا لم نجد ما يحقق الشرط المفروض على ع فالمسالة لا يمكن حلها بالنسبة الى س » .

ولا ننسى ان نذكر ان ما تقدم ليس ترجمة حرفية بل هو صورة منقحة لما كتب بابس وبين هذه الصورة وبين الاصل فروق تستحق الاعتبار لأن ما كتبه بابس يهمنا لأسباب كثيرة :

(١) فالصورة التي سقناها تستعمل اصطلاحات محددة اكثر من الاصل وتستعمل الرموز ا ، ب ، ... ل ، س ، ص ، ... ع وهـــذا ما ليس في الاصل .

(٢) والصورة تذكر التعبير « المسائل الرياضية » بينما المقصود في الاصـــل « المسائل الهندسية » وهذا اشارة الى ان الاجراء الذي يصفه بابس لا ينحصر استعماله في المسائل الهندسية . بل انه لا ينحصر في المسائل الرياضية وحدها . وهذا ما يلزم ان نوضحه بالامثلة فان كون هذا الاجراء عاماً مستقلاً عن موضوع المسالة أمر هام (انظر القسم **٣**) .

(٣) مثال جبري : اوجد قيمة س في المعادلة .

٨ (٤س + ٤ —س) — ٥٤ (٢س + ٢—س) + ١٠١ = ٠

هذه مسألة من « مسائل الايجاد » وهي ليست سهلة على المبتدىء . فينبغي ان يكون لديه فكرة عن التحليل . ولا نعني بذلك كلمة « التحليل » ذاتها طبعاً ولكن نعني الطريقة التي تستهدف الوصول الى الجواب بالتبسيط المتكرر . ثم ينبغي ان يكون الطالب على علم بابسط انواع المعادلات ثم هو حتى مع المعرفة الجيدة يحتاج الى فكرة جيدة ، الى شيء من الحظ ، الى ابتكار ، حتى يرى ان ٤ س = (٢س)^{٢} وان ٤ – س = (٢س) –^{٢} . فاذا عرفنا ذلك فقد يعنّ لنا ان نضع :

$$ص = ٢^{س} .$$

فاذا عوضنا نجد هذا مفيداً فعلاً اذ ينتج معنا معادلة في ص هي :

$$٨\left(ص^{٢}+\frac{١}{ص^{٢}}\right)-٥٤\left(ص+\frac{١}{ص}\right)+١٠١=٠$$

وهذه مسألة اسهل من المسألة الاصلية ولكننا ما زلنا بحاجة الى اختراع جديد وتعويض جديد : فلنضع :

$$ع = ص + \frac{١}{ص} .$$

فينتج ان :

$$٨ع^{٢} - ٥٤ع + ٨٥ = ٠$$

وهنا ينتهي التحليل شرط ان يكون الذي يحل المسألة يعرف حل المعادلات التربيعية .

والآن يأتي دور التركيب وهو السير خطوة خطوة في اجراء العمليات الحسابية التي أظهرها لنا التحليل . فالذي يحل المسألة لا يحتاج الى فكرة جديدة كي يكمل الحل وهو لا يحتاج الا الى الصبر والانتباه في العمليات الحسابية التي

توجد له قيم المجاهيل . والترتيب الذي تجري به هذه العمليات عكس الترتيب الذي تم به اختراع الحل : فنجد اولاً ع (ع = $\frac{٥}{٢}$ ، $\frac{١٧}{٤}$) ثم ص (ص = ٢ ، $\frac{١}{٢}$ ، ٤ ، $\frac{١}{٤}$) ، واخيراً نجد س المجهول الأصلي (س = ١ ، – ١ ، ٢ ، – ٢). فالتركيب يتعقب بشكل عكسي خطوات التحليل ، والمثال يوضح لنا ذلك .

(٤) مثال غير رياضي : رجل بدائي يريد ان يعبر جدولاً ، ولكنه لا يستطيع ان يخوض فيه لأن الماء مرتفع . وهكذا يغدو له عبور الجدول مسألة. « فعبور الجدول » هو المجهول س في هذه المسألة البدائية . وقد يتذكر الرجل انه عبر في الماضي جدولاً مثله على جذع شجرة سقطت عليه . ثم هو ينظر لعله يجد شجرة مثلها ساقطة (يجعلها مجهولاً جديداً ، ص) فلا يجدها ولكنه يجد اشجاراً عدة منتصبة على ضفة الجدول فيتمنى لو تسقط منها واحدة . ولكن هل يستطيع ان يحقق هذه الامنية ؟ هنا فكرة طيبة ومجهول جديد . كيف يوقع الشجرة على الجدول ؟

هذه الافكار المتوالية تحليل حسب اصطلاح بابس . فاذا نجح الرجل البدائي في تحليله فقد يغدو مخترع الجسور والفؤوس . فما التركيب ؟ هو ترجمة التحليل الى لغة العمل .

والخطوة النهائية فيه هي السير على جذع الشجرة فوق الجدول .

وموضوعات التحليل هي نفسها موضوعات التركيب . موضوعات واحدة تجهد ذهن الرجل في التحليل وتجهد عضلاته في التركيب . فالتحليل افكار والتركيب اعمال . ثم هناك فرق آخر ذلك ان التسلسل معكوس : فعبور الجدول هو اول رغبة تثير التحليل وهو آخر عمل ينتهي به التركيب .

(٥) والصورة التي قدمناها عن بحث بابس تظهر بشكل اوضح من الاصل

الرابطة الطبيعية بين التحليل والتركيب وهذه الرابطة تظهر بوضوح بالمثالين السابقين . فالتحليل ينجم بطبيعته قبل التركيب. والتحليل ابتكار والتركيب تنفيذ . التحليل وضع الخطة والتركيب تنفيذها .

(٦) وصورتنا حافظت على بعض الامور المستغربة في الاصل بل ابرزتها بوضوح : « نعتبر ما يطلب عمله كأنه قد عمل وما يطلب ايجاده ، كأنه وجد ، وما يطلب اثباته كأنه قد ثبت » . اليس في هذا تناقض ؟ اليس خداعاً للنفس ان نعتبر ان المسألة التي نريد حلها محلولة ؟ هنا غموض ، ما معناه ؟ ولكن اذا نحن راجعنا النص بانتباه ، وحاولنا مخلصين ان نراجع خبرتنا في حل المسائل فلا يبقى ثمة تناقض ولا غموض .

فلننظر اولاً في « مسألة الايجاد » . ولنسم المجهول س والمعطيات أ،ب،ج . فاعتبارنا المسألة محلولة يعني ان نعتبر ان هناك شيئاً ما « س » يحقق الشرط اي تتجمع فيه العلاقات بين أ ، ب ، ج التي يقتضيها الشرط . وهذا امر نفترضه من اجل البدء في التحليل لا غير . انه موقت عارض وهو لا يضر لانه اذا لم يكن هناك هذا الشيء واتفق ان ادى بنا التحليل الى حد ما فهو حتماً سيؤدي بنا الى مسألة ليس لها حل وهذا يدلنا على ان مسألتنا الاصلية ليس لها حل . اذن ففرضنا مفيد . ثم نحن لكي نفهم المسألة لا بد ان نرى ، ان نتصور في الذهن ، او ان نتخيل هندسياً هذه العلاقات التي يقتضيها الشرط بين س ، أ ، ب ، ج ؛ فكيف نفعل ذلك من غير ان نرى ونتصور ونتخيل وجود س ؟ واخيراً فان فرضنا طبيعي فالرجل البدائي الذي استعرضنا افكاره واعماله في الملاحظة(٤) يتخيل نفسه سائراً على شجرة ساقطة عبر الجدول قبل ان يسير فعلاً فهو اذن يرى ان مسألته قد حلت .

أما « مسألة الاثبات » فغايتها اثبات نظرية ما أ . وقولنا بان نعتبرها ثبتت هو دعوة للذهن لاستخلاص نتائج منها وان نكن لم نثبتها بعد . وبعض

الناس تمنعهم طبيعتهم الذهنية أو مبادئهم الفلسفية من استخلاص نتائج من نظرية لم تثبت ، فهؤلاء ما لهم وللتحليل .

قارن مادة الاشكال ، ٢ .

(٧) وصورتنا تذكر في موضعين العبارة : « شرط ان تكون الاستنتاجات كلها قابلة للتحول » . وهذا اضافة من عندنا فالاصل لا يحوي شيئاً من ذلك وهذا نقص تنبه له الناس حديثاً وانتقدوه . انظر المادة المسألة المساعدة ، ٦ لبحث فكرة « التبسيط المتحول » .

(٨) وتحليل « مسألة الاثبات » شرحناه بكلمات تختلف اختلافاً بيناً عما في الاصل ولكن ليس ثمة اختلاف في المعنى ، أو ليس ثمة اختلاف مقصود . أما « مسألة الايجاد » فتحليلها شرحناه بشكل مجسم اكثر مما في الاصل . فالاصل يشير على ما يبدو الى إجراء أعم ، الى سلسلة مسائل مساعدة متكافئة ، مما هو مشروع في مادة المسألة المساعدة ، ٧ .

(٩) ان كثيراً من الكتب المدرسية الابتدائيـــة في الهندسة يحوي ملحوظات قليلة عن التحليل والتركيب « وفرض المسألة محلولة » . وليس ثمـة شك في ان هذا التقليد انحدر الينا من بابس ولم تمحه الايام ، رغم اننا قد لا نجد في مؤلفي هذه الكتب من يعرف بابس معرفة مباشرة . والموضوع من الاهميـة بحيث يجدر ذكره في الكتب المدرسية ، ولكنه يسهل ان يساء فهمه . وظهوره في كتب الهندسة وحدها دليل على وجود سوء الفهم هذا على نطـاق واسع . (انظر الى الملحوظـــة ٢) . فاذا كانت الملحوظات التي جئنا بها هنا تمهد الى فهم أحسن فهي تستحق ما بذل من اجلها . وفي مادة العمل العكسي مثال آخر ونظرة في الامر من ناحية اخرى وملحوظات جديدة (قارن ايضاً المادة طريقة الخلف والبرهان غير المباشر ، ٢) .

بدعة المخترع

قد يكون مع الخطة الاكثر طموحاً امل أوسع في النجاح .

وفي هذه رنة تناقض . الا اننا عندما نغير المسألة المعطاة الى مسألة اخرى فكثيراً ما نجد ان المسألة الاكثر طموحاً أطوع من المسألة الاصلية . وكذلك قد نجد ان الاجابة عن عدد من الاسئلة اسهل من الاجابة عن سؤال واحد ؛ والنظرية الاشمل قد تكون أسهل برهاناً والمسألة الاعم قد تكون أطوع حلاً . وهذا ما يسمى ببدعة المخترع .

وما يبدو لنا في هذا من تناقض يزول اذا نحن دققنا النظر في بضعة أمثلة (التعميم ، ٢ ؛ الاستقراء والاستقراء الرياضي ، ٧) والخطة الاكثر طموحاً يكون معها أمل أوسع في النجاح شرط ألا تكون مبنية على افتراضات ليس لها سند بل على بصيرة تنفذ الى ما وراء العناصر الظاهرية .

برنارد بولزانو

(١٧٨١ — ١٨٤٨) منطقي رياضي كرّس جزءاً كبيراً من عرضه الشامل للمنطق (Wissenschaftslehre) لبحث الهورستيكا (الجزء الثالث ،الصفحات ٢٩٣ — ٥٧٥) .

وعن هذا الجزء من بحثه قال : « لا يخطر لي على بال ان بمقدوري ان آتي هنا بأي طريقة للبحث لم يعرفها من قديم اهل المواهب كلهم . ولا أعد احداً ان يجد هنا شيئاً جديداً من هذا النوع . ولكني باذل جهدي لأن اضع بكلمات واضحة قواعد البحث وطرقه التي يتبعها أهل الكفاءة من حيث يشعرون أو لا يشعرون . ولا يصور لي الغرور انني سأنجح نجاحاً كاملاً حتى في هذه المحاولة الا ان لي أملاً في ان القليل الذي اعرضه هنا سيرضي بعض الناس وسيكون ذا فائدة في المستقبل » .

التخصيص

التخصيص هو صرف النظر عن مجموعة كبيرة من العناصر وحصره في مجموعة اضيق او في عنصر واحد . وهو كثيراً ما يفيد في حل المسائل .

١ – **مثال** : اذا كان نق نصف قطر الدائرة المرسومة داخل المثلث ، نقَ نصف قطر الدائرة المحيطة به وكان اكبر ارتفاعاته ع فان

نق + نقَ = ع .

والمطلوب اثبات صحة هذه النظرية (او بطلانها) * .

فلدينا اذن « مسألة اثبات » . وهي نظرية من نوع غير مألوف . فنحن قد لا نتذكر أي نظرية عن المثلث فيها مثل هذا المطلوب . فان كان ذلك فلننظر في حالة خاصة من هـــذه النظرية . وابرز الحالات الخاصة للمثلث هو المثلث المتساوي الاضلاع ففيه :

$$\text{نق} = \frac{\text{ع}}{٣} \text{ ، نقَ} = \frac{٢\text{ع}}{٣}$$

فالنظرية تصح في هذه الحالة .

فان لم تتبادر الى ذهننا الآن فكرة جديـــدة فلنوسع نطاق التخصيص ولنأخذ المثلث المتساوي الساقين وهنا يتغير شكل المثلث حسب زاوية رأسه بين نهايتين احداهما عندما تصبح زاوية الرأس صفراً والثانية عندما تصبح ١٨٠ درجة . ففي الحالة الاولى تتلاشى قاعدة المثلث ويصبح نق = ٠ ، نقَ = $\frac{١}{٢}$ ع وتكون

---

* السؤال مأخوذ من :

The American Monthly, vol. 50 (1943), p. 124. and vol. 51 (1944), pp. 234-236.

النظرية صحيحة . وفي الحالة الثانية تتلاشى الارتفاعات ويكون :

نق = ٠ ، نقَ = ∞ ، ع = ٠

وهنا لا تصح النظرية .

واذن فقد برهنا على أن النظرية خاطئة ، وهكذا حللنا المسألة .

ويتضح الآن أن النظرية تكون باطلة في كل مثلث طويل القاعدة زاوية رأسه قريبة من ١٨٠ درجة فيمكن ان نتخلى عن نهاية الاوضاع اذا كان اتخاذها اساساً للحل لا يعتبر سليماً .

٢ – « الاستثناء يبرهن القاعدة » : هذا مثل سائر ولكن ينبغي ألا نعتبره اكثر من نكتة تبعث على الضحك من تراخي بعض المقاييس المنطقية . اما الجد فيقضي بان استثناء واحداً يكفي لأن ينقض أي قاعدة او تعميم نقضاً قاطعاً . بل ان الطريقة المألوفة ، بل افضل الطرق احياناً ، لدحض مثل هذه القواعد هو الاشارة الى مثل تخفق فيها وهذا ما سماه بعض الكتاب بالمثال المضاد .

فما يدّعي انه قاعدة عامة ينبغي ان يسري على مجموعة حالات ، ولكي ندحضه نخصص النظر فنستخرج حالة من هذه الحالات لا تسري عليها القاعدة . والمثال السابق (في ١) يظهر منه كيف نصنع ذلك . فنحن نفحص بادىء الامر حالة خاصة بسيطة نختارها لا على التعيين مما يسهل اختباره . فاذا تبين ان القاعدة لا تنطبق عليها تنقض القاعدة وينتهي الأمر . اما اذا كانت هذه الحالة تتمشى مع القاعدة فقد يؤدي فحصنا لها الى فكرة جديدة ، كأن ينطبع في ذهننا ان القاعدة قد تكون صحيحة ويتبدى لنا سبيل الى اثباتها ، أو قد نتجه اتجاهاً جديداً في البحث عن المثال المضاد اي حالة اخرى نختبر فيها القاعدة ، وقد نضطر الى تعديل الحالة التي فحصناها او تغييرها او فحص تخصيص اوسع نطاقاً او البحث عن نهايات الاوضاع كما بينا في المثال ١ .

ونهايات الاوضاع ذات فائدة خاصة . فاذا قيل ان قاعدة ما تنطبق على كل

ذوات الثدي فهي ينبغي أن تطبق على الغريب منها ايضاً كالحوت . ففحصه قد يؤدي الى دحض القاعدة . وهذا أمر محتمل ذلك أن الحالات المستغربة او المتطرفة قد تغيب عن اذهان الذين يصنعون التعميم . اما اذا ثبت أن القاعدة تنطبق على هذه الحالات المتطرفة فهذا دليل قوي يؤيد القاعدة كما كان اداة قوية بيدنا لهدمها . واذن فقد نعدل المثل السائر الذي بدأنا بـه بقولنا : « ما قد يكون استثناء هو اختبار للقاعدة » .

٣ **مثال :** اذا اعطينا سرعتي باخرتين ووضعها في لحظة ما وعلمنا ان كل باخرة تسير على خط مستقيم بسرعة ثابتة فأوجد اقصر مسافة بينهما .

ما المجهول ؟ اقصر مسافة بين جسمين متحركين . وينبغي أن نعتبر الجسمين نقطتين ماديتين .

ما المعطيات ؟ وضع النقطتين الابتدائي وسرعة كل منهما . والسرعتان ثابتتان مقداراً واتجاهاً .

ما الشرط ؟ يجب تعيين اقصر مسافة ، أي المسافة بين النقطتين المتحركتين « الباخرتين » عندما تكونان اقرب ما يمكن الى بعضهما .

ارسم شكلاً وادخل الترقيم المناسب : في شكل ٨ رمزنا للنقطتين في وضعها الابتدائي بالرمزين أ ، ب . والخطان المتجهان أ ل ، ب ك يمثلان السرعتين ، فالباخرة الاولى تبدأ من أ باتجاه أ ل وتقطع مسافة أ ل في وحدة الزمن . والباخرة الثانية تسير بالمثل بالاتجاه ب ك .

ب ك

ل أ

شكل ٨

ما المجهول ؟ اقصر مسافة بين باخرتين احداهما تسير باتجاه أ ل والاخرى باتجاه ب ك .

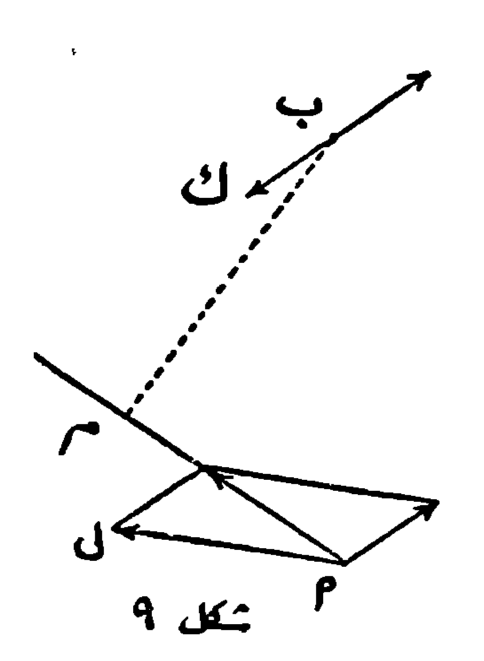
فقد أتضح الآن ما الذي يجب ان نوجده . الا اننا اذا أردنا ان نستعمل الوسائل الابتدائية فقط فطريقة ايجاده ما تزال عندنا مجهولة . فالمسألة ليست سهلة جداً وصعوبتها ان مجال التغيير فيها واسع . فالنقطتان أ ، ب، والسرعتان أ ل ، ب ك يمكن اتخاذهما بعدة اوضاع فالواقع اننا اخترنا النقاط أ ، ب ، ل ، ك، اعتباطاً. ونحن نعرف أنه مهما اختلفت هذه المعطيات فالحل يجب أن يسري عليها جميعاً ولسنا ندري بعد كيف نجعل حلنا يشمل كل الاوضاع . فشعورنا بان في المسألة هذا التنويع قد يؤدي الى هذا السؤال :

هل تتخيل مسألة تتصل بهذه ويسهل حلها ؟ مسألة اخص ؟ طبعاً ، فهنالك الحالة الخاصة المتطرفة عندما تتلاشى احدى السرعتين . اجل فالباخرة ب قد تكون راسية وعندها تنطبق ك على ب . فاقصر مسافة بين الباخرة الراسية والباخرة المتحركة هو العمود النازل على الخط الذي تسير عليه الباخرة المتحركة .

٤– فاذا جاءتنا الفكرة السابقة مع وعي كامل بان قد بقي وراءها الكثير مما ينبغي ان نعمله ومع شعور بان هذه الحالة المتطرفة « التي يبدو انها اسهل من ان تكون ذات شأن في الحل » قد يكون لها دور تلعبه – فالفكرة لا شك فكرة نيرة .

هنا مسألة تتصل بمسألتك ، الحالة الخاصة التي حللتها . فهل يمكنك ان تستعملها ؟ هل يمكنك ان تستعمل نتيجتها ؟ هل يلزم ان تدخل عنصراً جديداً يجعل استخدامها ممكناً ؟ ينبغي ان نستعملها . ولكن كيف ؟ كيف يمكن ان نستعمل الحالة التي تكون فيها ب ثابتة في حل الحالة التي تكون فيها ب متحركة ؟ ان السكون حالة خاصة من حالات الحركة . والحركة نسبية . اذن فمهما كانت سرعة ب فبامكاني أن أعتبر أنها ساكنة ! فلنوضح هذه الفكرة :

اذا نحـــن اعطينا للمجموعـــة (الباخرتين) سرعـــة منتظمة واحدة فوضعاهما النسبيان لا يتغيران والمسافـة النسبية بينهما لا تتغير ولاسيما اقصر مسافة بينهما وهي التي يطلب ايجادهـــا . ففي امكاني ان اعطيهما سرعة تجعل سرعـــة احداهما صفراً .



شكل ٩

وهكذا نبسط الحالة العامة في المسألة بتحويلها الى الحالة الخاصة التي حللناها . فلنضف سرعة تساوي وتعاكس ب ك ، نضيفها الى كل من ب ك ، أ ل . وهذا هو العنصر المساعد الذي يجعل استعمال الحالة الخاصة ممكناً .

انظر شكل ٩ لانشاء اقصر مسافة وهي ب م .

٥ – فالحـــل السابق في (٣ ، ٤) يحوي نموذجاً منطقياً يستحق ان نحلله وان نتذكره .

فلكي نحل المسألة الأصلية (الأسطر الاولى في ٣) لجأنا الى حـــل مسألة أخرى (٣ ، الأسطر الأخيرة) يمكن ان نعتبرها بحق المسألة المساعدة . وهذه المسألة المساعدة حالة خاصة من المسألة الأصلية (الحالة الخاصة المتطرفـة التي تكون فيها احدى الباخرتين في حالة سكون) .

والمسألة الأصلية فرضت علينا ، أما المسألة المساعدة فابتكرناها في سبيل الحل . والمسألة الاصلية كانت تبدو صعبة . أما المسألة المساعدة فقد جاء حلها في الحال . والمسألة المساعدة كانت في الحقيقة حالة خاصة اقل طموحاً بكثير من المسألة الاصلية . فكيف امكن أن نحل المسألة الاصلية على اساس المسألة

المساعدة ؟ لأننا بسطنا المسألة الاصلية الى المساعدة بادخـــال مبدأ اضافي هام (عن نسبية الحركة) .

وقد حللنا المسألة الاصلية بفضل ملاحظتين : اولاهما ابتكار مسألة مساعدة مفيدة والثانية اكتشاف ملاحظة اضافية مكنتنا من المضي من المسألة المساعدة الى المسألة الاصلية . ولقد حللنا المسالة المطلوبـــة بخطوتين كما يمكن أن نعبر الجدول بخطوتين اذا نحن توفقنا في العثور في وسطه على الحجر المنـاسب الذي يمكن أن نتخذه موطىء قدم .

وصفوة القول أننا اتخذنا المسألة الاسهل الأقل طموحاً الخاصـــة المساعدة كموطىء قدم لحل المسألة الاصلية الأصعب الاكثر طموحاً العامة .

٦ – ويستعمل التخصيص في حالات أخرى كثيرة لا يمكن أن نناقشهـا هنا . فيكفي أن نشير الى أنه يمكن أن يستعمل لاختبار الحل (هل يمكنك ان ان تحقق النتيجة ؟ ٢) .

ومن انواع التخصص البدائية نوع يفيد المدرس وهو ان يعطي تفسيراً مادياً للعناصر الرياضية المجردة في المسألة . فاذا كانت المسألـــة تحتوي على متوازي مستطيلات فيمكن المدرس ان يتخـذ الحجرة التي يدرس فيها كمثال على ذلك (القسم ٨) ، وفي الهندسة التحليلية المجسمة يمكن ان يتخـــذ ركن حجرة الدراسة ليمثل نقطـــة الاصل للاحداثيات وارض الحجرة والجدران لتمثل المستويات الاحداثية الثلاثة والحرفان الافقيان والحرف الرأسي لتمثـل المحاور الاحداثية الثلاثة . ولشرح السطح الدوراني يمكن المدرس أن يرسم خطاً ما على الباب ثم يفتحه ببطء . هذه بالطبع حيل بسيطة ، ولكن ينبغي ألا نألوا جهداً في تقريب الرياضيات من الحياة اليومية للطلاب، فالرياضيات لأنها علم مجرد محض ينبغي عرضها كشيء مادي جداً .

الترقيم

اذا شئت ان تعرف مزايا الترقيم الجيد اذا حسن اختياره وانتشر استعماله ،

فجرب أن تجمع بضعة اعداد شرط ألا تكون صغيرة جداً والا تكتبها بالارقام الهندية – اكتبها بالارقام الرومانية اذا شئت . وخذ مثلاً الاعداد (MMMXC ,MDXCVI ,MDCXLVI ,MDCCLXXXI ,MDCCCLXXXVII) * .

وللترقيم الجيد في الرياضيات أهمية بالغة . فرجال الحسابات المعاصرون باستعمالهم الترقيم العشري احسن حالاً بكثير من زملائهم القدماء الذين لم يعرفوا هذا النظام الرائع لكتابة الاعداد . والطلاب المعاصرون العاديون بما يعرفون من النظام الرمزي المتبع في الجبر والهندسة التحليلية وحساب التفاضل والتكامل احسن حالاً بكثير من رياضيي اليونان عند حل مسائل المساحات والحجوم التي كان يجند لها ارخميدس عبقريته .

١ – ان التكلم والتفكير عمليتان مترابطتان ، واستعمال الكلمات عون للعقل . حتى ليذهب بعض من الفلاسفة وعلماء اللغات الى التأكيد بان الكلمات ضرورة لازمة للتفكير .

ولكن يبدو أن في هذا بعض المغالاة ، فمن كان له خبرة بسيطة بالدراسة الرياضية الجادة يعرف أنه يستطيع أن يبذل شيئاً من التفكير العميق بمجرد النظر في شكل هندسي أو معالجة رموز جبرية من غير أن ينطق بكلمة واحدة . بيد أن الاشكال والرموز ترتبط ارتباطاً وثيقاً بالتفكير الرياضي واستعمالها سند للتفكير ، حتى لنستطيع ان نعدل ذلك الرأي الضيق الذي يراه الفلاسفة وعلماء اللغات بوضع الكلمات وغيرها من الاشارات في مرتبة واحدة ، فنقول : يبدو أن الاشارات ضرورة لازمة للتفكير .

وعلى كل حال فان استعمال الرموز الرياضية كاستعمال الكلمات ، وان الترقيم

---

* الاعداد التي يذكرها المؤلف هي على الترتيب : ٣٠٩٠ ، ١٥٩٦ ، ١٦٤٦ ، ١٧٨١ ، ١٨٨٧ ، وأن محاولة جمع هذه الاعداد بدون كتابتها بالارقام الهندية لتبين ميزة هذا النظام الذي اخذه العرب من الهند ونشروه في العالم . (المترجم)

الرياضي نوع من اللغة ، لغة تلائم اهدافها كل الملاءمة ، موجزة ودقيقة ، ولها قواعد ليست كالقواعد اللغوية فهي لا تقبل الاستثناءات .

فاذا قبلنا بوجهة النظر هذه ، فان وضع المعادلات ضرب من الترجمة ، ترجمة من اللغة العادية الى لغة الرموز الرياضية .

٢ – وبعض الرموز الرياضية مثل + ، – ، = وكثير غيرها لها معنى ثابت تقليدي ، ولكن بعض الرموز الأخرى يستعمل بمعاني مختلفة في المسائل المختلفة . فعندما نجابه مسألة جديدة ينبغي أن نختار لها رموزاً فعلينا أن نضع الرموز المناسبة . وهناك ما يقابل ذلك في الكلام العادي ، فكثير من الكلمات تستعمل بمعاني مختلفة في المناسبات المختلفة .

وعندما تهمنا الدقة ينبغي ان ننتقي كلماتنا بعناية ، ومن الخطوات الهامة في حل أي مسألة اختيار الترقيم المناسب لها . وهذا ينبغي ان يجري بعناية . فالوقت الذي نبذله في اختيار الرموز نوفره بخلاصنا من التردد والالتباس . أضف الى ذلك أن عنايتنا باختيار الرموز المناسبة تجعلنا ندقق النظر في عناصر المسألة التي سنرمز اليها وبذا قد يؤدي اختيار الرموز الى فهم المسألة .

٣ – والترقيم الجيد يكون خلواً من الغموض ، خصباً ، يسهل تذكره ، وفيه نتحاشى خطر الرمز الذي يحمل اكثر من معنى واحد ، ونفيد من مزية الرمز الذي قد يحمل معنى ثانياً مفيداً . وفيه ايضاً يوحي ترتيب الاشارات والروابط التي بينها بترتيب الأشياء المرموز اليها والروابط التي بينها .

٤ – فالاشارات ينبغي أن تكون قبل كل شيء خلواً من الغموض . فلا يجوز ان نستعمل رمزاً واحداً الى شيئين مختلفين في مسألة واحدة . فاذا سميت شيئاً ما في مسألة ما بالاسم أ فتجنب أن تسمي بهذا الاسم شيئاً آخر ذا صلة بالمسألة نفسها . ولكنك تستطيع طبعاً أن تستعمل أ بمعنى آخر في مسألة أخرى .

ومع أنه يمنع استعمال رمز واحد للدلالة على شيئين مختلفين في مسألة واحدة

الا أنه لا يمنع استعمال رموز مختلفة للدلالة على شيء واحد فان حاصل ضرب أ في ب يمكن أن نكتبه باي من الاشكال :

أ × ب او أ . ب او أ ب .

ونجد أحياناً أن من المفيد ان نستعمل اشارتين او اكثر للدلالة على شيء واحد ولكن في هـــذه الحالة يلزم الانتباه الكافي . ولذا يستحسن عادة ان يستعمل رمز واحد للشيء الواحد ولا يجوز في اي حال من الاحوال استعمال عدة رموز اعتباطاً بلا مبرر .

٥ – والاشارة الجيدة ينبغي ان تكون بحيث يسهل تذكرها ويسهل التعرف عليها فالاشارة يجب أن تدلنا بسهولة على الشيء الذي ترمز اليه والشيء يجب أن يدلنا بسهولة على رمزه .

والطريقة السهلة لجعل الرموز بحيث يسهل التعرف عليها ان نستعمل اول أحرف الكلمة رمزاً لها . ففي القسم ٢ ، استعملنا س للسرعة ، ح المحجم ، نق لنصف القطر . ولكن لا نستطيع ان نصنع ذلك في جميع الحالات ، كما أن ثمة عوامل أخرى تحدد اختيار الرموز ووسائل أخرى تجعل التعرف عليها سهلاً . وهذا ما سنشرحه فيما بعد .

٦ – فالترقيم لا يكفي ان يكون بحيث نعرف الرموز بسهولة فقط بل يجب ان يساعدنا ايضاً في تكييف فهمنا للمسألة اذ يوحي ترتيب الاشارات والروابط بينها بترتيب الاشياء المرموز اليها والروابط بينها ونحن بحاجة الى عدة امثلة لشرح هذه النقطة .

(I) فلكي نرمز الى شيئين متقاربين في المسألة نستعمــل حرفين متقاربين في الأبجدية .

فنستعمل عادة اوائل حروف الابجديـــة أ ، ب ، ج للكميات المعطاة او

الثابتة ونستعمل حروفاً من أواخر الابجدية مثل س ، ص ، ع للكميات المجهولة او المتغيرة .

وفي القسم ٨ استعملنا أ ، ب ، ج للدلالة على طول متوازي المستطيلات وعرضه وارتفاعه وهذا كان أنسب من استعمال حروف من الكلمات مثل ل ، ض ، ع ، فان الابعاد الثلاثة تلعب دوراً واحداً في المسألة وهذا ما يؤكده استعمال حروف متوالية في الابجدية . ثم هي من أول الابجدية وهذا كما ذكرنا اشارة الى أنها كميات معطاة . الا أننا في مناسبات أخرى حيث تلعب هذه الابعاد ادواراً مختلفة كأن يقتضي الأمر ان نميزها أيها الافقيان وأيها العمودي قد نفضل ان نرمز لها بالحروف ل ، ض ، ع .

(II) وعندما نرمز الى اشياء من فصيلة واحدة واشياء اخرى من فصيلة اخرى نميزها بحركات تضاف الى الحروف . ففي الهندسة المستوية كثيراً ما نستعمل :

أ ، ب ، ج ، .. للنقط او الزوايا
أَ ، بَ ، جَ ، للمستقيمات *

واذا كان لدينا شيئان من فصيلتين مختلفتين ولكن بينهما روابط تهمنا في مسألتنا فقد نرمز لهذين الشيئين برمزين متناظرين = أ ، أَ ، و ب ، بَ وهكذا :

وفي المثلث نرمز عادة بالرموز
أ ، ب ، ج ، لرؤوسه وزواياه
أَ ، بَ ، جَ ، لاضلاعه *

---

* يذكر المؤلف هنا ثلاث فصائل : a,b,c للاطوال A,B,C للنقط والاحرف اليونانية للزوايا ومعلوم ان هذا لم يدرج استعماله حتى اليوم في العربية ونحن من اجل ذلك نعاني في الترقيم الرياضي نقصاً لا مبرر له ولا يستقيم مع نهضتنا الفكرية ولا سيما في هندسة المساقط وفروع اخرى من الرياضيات العالية . (المترجم)

ومفهوم ان أ يقابل الرأس أ والزاوية أ وهكذا .

(III) وفي القسم ٣٠ كانت الحروف أ ، ب ، س ، ص قد اختيرت اختياراً موفقاً فهي تدل على طبيعة ما ترمز اليه والروابط التي بينها. فالرمزان أ ، ب يشيران الى الكميتين الثابتتين والرمزان س ، ص يرمزان الى المتغيرتين ، ثم ان ب تلي أ كما أن ص تلي س ثم أن أ ، س افقيتان في حين أن ب ، ص رأسيتان وأن أ : ب = س : ص .

٧ — والرمز

△ أ ب جـ ∽ △ هـ و ح رمز ينتشر استعماله حديثاً للدلالة على تشابه المثلثين .

وفي الكتب الحديثة يفضل استعماله ليشير الى تشابه المثلثين والى ان الرؤوس تتناظر حسب ترتيبها :

أ يناظر هـ ، ب يناظر و ، جـ يناظر ح . والكتب القديمة لا تعتبر هذا الترتيب .

وظاهر ان الترقيم الحديث افضل ، فمنه تستنتج نتائجك دون الرجوع الى الشكل فتكتب مثلاً ان :

∠ أ = ∠ هـ ، أ ب : ب جـ = هـ و : و ح

وغيرها من العلاقات . في حين ان الترقيم القديم اقل تعبيراً ولا يفضي الى هذه النتائج .

والترقيم الذي يعبر اكثر من غيره يمكن ان نسميه أخصب . فالترقيم الحديث للتشابه بين المثلثين أخصب من القديم وهو يعكس صورة اكمل من الروابط بين العناصر ويصلح اساساً لنتائج اكثر .

٨ — وللكلمات معانٍ ثانوية وبعض المناسبات التي تستعمل بها الكلمة تؤثر فيها وتضفي شيئاً على معناها الاصلي ، ظلا ، او معنى ثانوياً او قرينة . والذي

يكتب بعناية يتعمد ان يختار من المترادفات الكلمة التي يكون معناهـا الثانوي اكثر ملاءمة له .

وهناك شبيه بهذا في الترقيم الرياضي ، فحتى الرموز الرياضية قـد تكتسب معنى ثانوياً من المناسبات التي يكثر استعمالها فيها .

فاذا تقصدنا ان نختار رموزنا بعناية فينبغي ان ندخل هذا الامر في حسابنا . ولنوضح هذه النقطة .

لدينا احرف اكتسبت معاني تقليدية عميقة الجذور . فمثلاً « e » ترمز عادة الى اساس اللوغرتمات الطبيعية ، « i » للوحدة التخيلية $\sqrt{-1}$ ، Π (او ط في بعض البلاد العربية) لنسبة محيط الدائرة الى قطرها . فيفضل ان تستعمل هذه الرموز بمعانيها التقليدية فقط لأننا اذا استعملناها بمعنى آخر فقد يلتبس بمعناها التقليدي ويحدث ارتباكاً او تضليلاً . وصحيح ان المعاني الثانوية في هذه الحالة لا تضايق المبتدىء الذي لم يدرس موضوعات عدة كما تضـايق الرياضي المطلع ، ولكن هذا يكون قد حصل على خبرة تمكنه من التغلب على هذه المزعجات .

والمعاني الثانوية قد تكون مفيدة واحياناً كبيرة الفائدة ، اذا هي استعملت بمهارة . فالترقيم الذي استعملناه في مناسبة سابقة قد يساعدنا في تذكر طريقـة مفيدة، شرط ان تكون لدينا الخبرة الكافية للتمييز بين المعنى الحالي «الرئيسي» والمعنى السابق « الثانوي » للرمز . والترقيم الدارج كالترقيم المألوف لعناصر المثلث الذي رأيناه في ٦ (II) له فوائد عظيمة . فاذا استعملناه مرات متعددة فقد يساعدنا في تذكر طرق سبق لنا استعمالها . ونحن نتذكر القوانين بترقيمها الدارج انما ينبغي ان ننتبه اذا نحن لأمر ما اضطررنا الى استعمال ترقـيم دارج بمعنى يخالف معناه المألوف .

٩ ــ وعندما يكون علينا ان نختار بين ترقيمين فقد نجد سبباً يزكي لنا الاول وسبباً يزكي لنا الثاني ، واننا لنحتاج الى الخبرة والذوق كيما نختار الترقيم المناسب كما نحتاج الى الخبرة والذوق كيما نختار الكلمة المناسبة . ولكن ينبغي ان نعرف

ما تقدم ذكره حول مزايا الترقيمات المختلفة ونقائصها . ونحن على كل حال يجب ان نختار ترقيمنا بعناية وان يكون لدينا سبب قوي للاختيار .

١٠ – والطلاب ينفرون من الجبر عادة – لا ضعفاؤهم فحسب ، بل اذكياؤهم احياناً – فهم يجدون ان ثمة شيئاً اعتباطياً مصطنعاً حول الرموز ويشعرون ان تعلم اي ترقيم جديد معناه اضافة اعباء اخرى على ذاكرتهم . والطالب الذكي قد يرفض هذا العبء اذا هو لم يؤمن بفائدته . وهو يكون على حق في نفوره من الجبر اذا هو لم تتح له فرصة واسعة تقنعه بها تجاربه الخاصة ان لغة الرموز الرياضية عون للعقل . وان إتاحة هذه الفرصة للطالب لواجب هام من اهم الواجبات عند المدرس .

ونقول انه واجب هام ، ولكن لسنا نقول انه سهل . وقد يساعد المعلم على هذا الواجب البحث المتقدم . وانظر ايضاً المادة : وضع المعادلات . ثم ان تحقيق القانون بمناقشة خصائصه باسهاب امر نوصي به كتمرين ذي فائدة تعليمية كبيرة . انظر القسم ١٤ والمادة : هل يمكنك ان تحقق النتيجة ؟ ، ٢ .

التشخيص

نستعمل هنا التشخيص بمعنى فني تربوي نقصد به « تمييز عمل الطالب تمييزاً دقيقاً » .

ان الدرجات وسيلة فجة لهذا التمييز والمدرس الذي يرغب في تحسين مستوى العمل عند طلابه يحتاج الى تمييز ادق لنقاط قوتهم وضعفهم كما يحتاج الطبيب الذي يريد تحسين صحة مرضاه الى تشخيص لامراضهم .

والذي يعنينا هنا فعالية الطلاب في حل المسائل فكيف نميزها؟ من اجل ذلك نلجأ الى التفريق بين المراحل الاربع للحل فان تصرّف الطالب تجاه كل من هذه المراحل امر مميز له .

ففهم المسألة فهماً ناقصاً بسبب عدم تركيز الذهن ربما كان اعم النقائص التي

نقابلها في حل المسائل . اما ابتكار الخطة والحصول على فكرة عامة للحل فكثيراً ما نقابل بصدده نقصين اثنين متباينين : فطلاب يهجمون على العمليات الحسابية او الرسوم الهندسية من قبل رسم الخطة او تكوين الفكرة العامة ، وطلاب يقفون موقفاً سلبياً بانتظار حضور الفكرة ولا يعملون ما يسارع في حضورها . وفي تنفيذ الخطة نجد النقص الشائع : الاهمال وعدم الصبر على تحقيق الخطوات . أما تحقيق النتيجة فاهماله عام ايضاً . والطالب يسره ان يحصل على نتيجة مهما تكن ، ثم هو يلقي بقلمه ، ولا تلفت انتباهه ابعد النتائج عن المعقول .

فاذا شخّص المدرس احدى هذه النقائص تشخيصاً دقيقاً امكنه علاجها بالالحاح في الاسئلة المناسبة من اسئلة الثبت .

التعريف

تعريف المصطلح نص يبين معناه بكلمات يفرض انها مفهومة .

١ – والمصطلحات التقنية في الرياضيات نوعان : فبعضها تؤخذ على انها مصطلحات بدائية ولا تحتاج الى التعريف ، وسائرها تعتبر مصطلحات مولدة وهي تعرف بالشكل المناسب ، اي ان معانيها توضح بدلالة المصطلحات البدائية ومصطلحات اخرى سبق تعريفها . ولذا لا يلزم ان نعطي تعريفات شكلية للمصطلحات البدائية امثال النقطة والخط المستقيم والمستوى* في حين اننا نعطي تعريفات لامثال « منصف الزاوية » و « الدائرة » و « القطع المكافىء » .

ويمكن ان نعرف القطع المكافىء كما يلي : القطع المكافىء هو المحل الهندسي للنقطة التي يتساوى بعداها عن نقطة ثابتة وخط مستقيم ثابت . والنقطة الثابتة نسميها بؤرة القطع والخط الثابت نسميه الدليل . ومفهوم ان كل هذه العناصر

---

* من هذه الناحية تغير الوضع عما كان عليه في أيام اقليدس ومن تبعه من الاغريق الذين عرفوا النقطة والخط المستقيم والمستوي . ولكن « تعريفاتهم » هذه قلما كانت تعريفات شكلية ، انها نوع من التفسير الحدسي ، وهذا التفسير يسمح به في التدريس بل هو امر مرغوب فيه .

في مستوٍ واحد ، وان النقطة الثابتة (البؤرة) ليست على الخط المستقيم الثابت (الدليل) .

وفي هذا التعريف لا نفترض ان يكون القـــارىء قد عرف المصطلحات : القطع المكافىء ، والبؤرة ، والدليـــل ، ولكن نفترض انه عرف معـاني المصطلحات الاخرى كلها كالنقطة والخط المستقيم والمستوى والبعد بين نقطتـين والمحل الهندسي والمقدار الثابت ... الخ .

٢ — وتعريفات القواميس لا تختلف عن التعريفات الرياضية في ظاهرهـا الا انها تخدم غاية اخرى ، فواضع القاموس يهمه المعنى الدارج للكلمات وهو يقبـل هذا المعنى الدارج طبعاً ويضعه بأحسن ما يستطيـع على شكل تعريف .

اما الرياضي فلا يهمه المعنى الدارج للمصطلح التقني أو هو لا يحـــله المنزلة الاولى من الاهمية ، ولا يهمه ماذا يمكن ان تعني او لا تعني في الحيـــاة اليومية امثـال الكلمات « دائرة » ، و « قطع مكافىء » وسواهـا ، ذلك ان التعريف الرياضي يخلق المعنى الرياضي ويحدده .

٣ — مثال : ارسم نقطة تقاطع خط مستقيم مفروض مع قطع مكافىء علمت بؤرته ودليله .

ان طريقة بدئنا اي مسألة تعتمد على معلوماتنا السابقة ، فطريقة بدئنا لهذه المسألة تعتمد على مدى معرفتنا لخواص القطع المكافىء .

فاذا كنا نعرف عنه الكثير امكن ان نستفيد من معرفتنا هذه ونستخلص منها ما يفيد . هل تعرف نظرية قد تفيدك؟ هل تعرف مسألة ذات صلة بمسألتك؟ واذا كنـا لا نعرف الا القليـل عن القطع المكافىء والبؤرة والدليـــل فهذه المصطلحات قد تزيدنا ارتباكاً ويحسن ان نتخلص منها . فلنصغِ الآن الى محاورة بين المدرس والطالب في نقاشهما لهذه المسألة .

لقد اختارا الرموز المناسبة : ل ترمز لأي من نقاط التقاطع ، ب ، للبؤرة ، مَ للدليل ، جَ للمستقيم الذي يقاطع القطع المكافىء .

« وما المجهول ؟ »

« النقطة ل » .

« وما المعطيات ؟ »

« المستقيم جَ والمستقيم مَ والنقطة ب » .

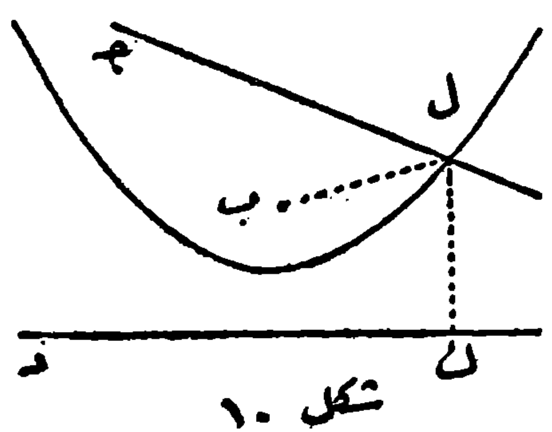
« وما الشرط ؟ »

« ل هي نقطة تقاطع المستقيم جَ والقطع المكافىء الذي دليله مَ وبؤرته ب» .

« صح . اعرف انك لم تدرس الكثير عن القطع المكافىء ، ولكن اظنك تعرف ما هو » .

« القطع المكافىء هو المحل الهندسي للنقط المتساوية البعد عن البؤرة والدليل » .

« صح . انك تذكر التعريف جيداً . وهذا صحيح ولكن يجب ان تحسن استخدامه . ارجع الى التعريفات . من تعريف القطع المكافىء ماذا يمكنك ان تستنتج عن النقطة ل ؟ »



شكل ١٠

« ل تقطع على القطع المكافىء فهي اذن على بعدين متساويين من مَ ، ب» .

« جيد ! ارسم شكلاً » .

يدخل الطالب في شكل ١٠ المستقيمين ل ب ، ل ك ، وهذا الاخير هو العمود النازل من ل على مَ .

« والآن هل يمكنك اعادة المسألة بتعبير من عندك ؟ »

« . . . . . . »

« هل يمكنك اعادة شروط المسألة باستعمال المستقيمين اللذين اضفتهما ؟ »

« ل نقطة على المستقيم جـَ تؤخذ بحيث يكون ل ب = ل ك » .

« جيد . ولكن قلها من فضلك بالكلمات . ما هو ل ك ؟ »

« البعد العمودي من ل على مَ ».

« جيد . والآن هل يمكنك اعادة المسألة ؟ قلها من فضلك بشكل واضح واجعله موجزاً » .

« ارسم نقطة ل على مستقيم معلوم جـَ بحيث تكون على بعدين متساويين من نقطة معلومة ب ومستقيم آخر معلوم مَ » .

« لاحظ التطرق من النص الاصلي الى نصك هذا . لقد كان النص الاصلي مليئاً بالمصطلحات التقنية الغريبة مثل قطع مكافىء وبؤرة ودليل ، فكان فيه رنة حذلقة وفخفخة . والآن لم يبق من هذه المصطلحات المستهجنة شيء . لقد طهّرت المسألة من الحذلقة . وخيراً فعلت ! »

٤ — حذف المصطلحات التقنية . هذا ما توصلنا اليه في المثال السابق . فقد بدأنا بنص للمسألة يحوي بعض المصطلحات التقنية « القطع المكافىء ، البؤرة ، الدليل » ثم توصلنا اخيراً الى نص كان خلواً من كل هذا .

ولكي نتخلص من مصطلح تقني يجب ان نعرف تعريفه . وهذا وحده لا يكفي فيجب ايضاً ان نستعمل هذا التعريف، وفي المثال السابق لم يكفِ ذكر تعريف القطع المكافىء وكانت الخطوة الحاسمة في ادخال المستقيمين ل ب، ل ك في الشكل وكان تساويهما من مضامين تعريف القطع. وهذا هو النهج النموذجي: ندخل عناصر جديدة في المسألة وعلى اساس التعريف نقيم علاقات بين العناصر التي ندخلها ، واذا كانت هذه العلاقات تعبر تعبيراً كاملاً عن معنى التعريف

فقد جنينا منه كل فائدة ممكنة . واذ نجني الفائدة الممكنة للتعريف لا يبقى ما يدعو لاستعمال المصطلح .

وهذا النهج الذي وصفناه هو ما سميناه الرجوع الى التعريف .

فبالرجوع الى تعريف المصطلح التقني نستطيع ان نخلص منه ونستعيض عنه بعناصر جديدة وعلاقات جديدة . والتغير الذي ينجم عن ذلك في ادراكنا للمسألة قد يكون هاماً وهو على كل حال نص جديد تغيير للمسألة .

٥ – التعريفات والنظريات المعروفة : اذا كنا نعرف كلمة قطع مكافىء وكان لدينا فكرة باهتة عن شكل هذا القطع ولا شيء غير ذلك فغني عن البيان ان معرفتنا لا تكفي لحل المثال الذي سبق او اي مسألة هندسية ذات شأن حول القطع المكافىء . فما المعلومات اللازمة لهذا الغرض ؟

يمكننا ان نعتبر علم الهندسة مجموعة بديهيات وتعريفات ونظريات . والقطع المكافىء لا ذكر له بين البديهيات التي تضم الاسماء البدائية كالنقطة والخط المستقيم وامثالهما . فكل نقاش هندسي حول القطع المكافىء وحول كل مسألة تضمه يجب ان يستعمل فيه اما تعريفه او نظريات عليه . لحل مسألة كهذه يكون اقل ما يلزم ان نعرف تعريف القطع ولكن يفضل ان نعرف أيضاً نظريات تتعلق به .

وكل ما قلناه عن القطع المكافىء يصدق على كل مصطلح مولد . وعندما نبدأ بحل مسألة تشتمل على مصطلح مولد لا ندري ايهما افضل أنلجأ الى تعريفه ام الى نظرية حوله . ولكن المؤكد اننا لن نستغني عن واحد من هذين وهناك حالات لا مجال فيها للاختيار . فاذا لم نعرف من الامر غير التعريف فلا نستطيع ان نستعمل غيره واذا كانت معرفتنا فيما عدا التعريف قليلة فلا بد من تزويدها بالرجوع اليه . أما اذا كنا نعرف نظريات كثيرة عدا التعريف ولدينا خبرة كبيرة بالمصطلح فقد نعثر على نظرية مناسبة من نظرياته .

٦ – التعريفات المختلفة : تعرف الكرة عـــادة بأنها المحل الهندسي للنقط المتساوية البعد عن نقطة ثابتة « النقط هنا في الفضاء ، لا يحدها مستوٍ واحـــد » ولكن يمكن تعريف الكرة ايضـــاً بانها السطح الذي ترسمه دائرة تدور حول قطرها . وثمة تعريفات اخرى للكرة نعرفها وتعريفات غيرها يمكن وضعها .

فعندما نريد حل مسألة تنطوي على مصطلح مولد « كالكرة » و « القطـع المـكافىء » ونرغب في الرجوع الى التعريف نجـــد مجالاً للاختيار من هذه التعريفات المتباينة . وعلى حسن اختيارنا للتعريف المناسب قد يعتمد الحل .

فعندما حل ارخميدس مسألة مساحة الكرة كانت حتى ذلك العهد مســألة عظيمة شائكة وكان على ارخميدس ان يختار بين التعريفين اللذين سبق ذكرهما فاختار ان يعتبر الكرة السطح الذي ترسمه دائرة تدور حول قطر ثابت فيها . ثم رسم في الدائرة مضلعاً منتظماً يحوي عدداً زوجياً من الاضلاع ويصل القطر بين ركنين متقابلين فيه ، وجعل المضلع يقارب الدائرة فاذا دارت دار معهـا ورسم مجسماً محدباً يتكون من مخروطين رأساهما عند طرفي القطر وبينهـما عدد من القطع المخروطية ، فمجموع مساحات هذه المجسمات تقارب مساحة الكرة ، فبهذا الشكل تمكن ارخميدس من ايجاد مساحة الكرة .

فاذا نحن اخترنا ان نعتبر الكرة المحل الهندسي للنقاط المتساوية البعد عن المركز فلا يوحي هذا الاختيار باي حل تقريبي لمسألة المساحة .

٧ – والرجوع الى التعريفات ذو اهمية عندما نريد ان نبتكر الطريقـة ، وهو ذو اهمية ايضاً عندما نريد ان نحققها . فاذا جاءنا شخص بحل جديد لمسألة ارخميدس عن مساحة الكرة ، وكان كل ما يعرفه عن الكرة فكرة ضئيلة باهتة فلا يمكن ان يكون حله ذا قيمة ، واذا كان يحمل عنها فكرة واضحة ولكنه لم يستعملها في حله فليس ثمة دليل على معرفته هذه ، ولا يمكن ايضاً ان يكون حله ذا قيمة . واذا انت استمعت الى حله فانت تتوقع ان تراه يقول شيئـاً ذا قيمة عن الكرة باستعمال تعريفها او نظرية تتعلق بها فان لم يحدث ذلك تحكم بان

الحل لا قيمة له . وكما نحكم على طرق غيرنا ينبغي ان نحكم على طرقنا ايضاً . هل ادخلت في حسابك كل الافكار الرئيسية التي تنطوي عليها المسألة ؟ كيف عالجت هذه الفكرة ؟ هل استعملت معناها او تعريفها ؟ هل استعملت حقائق اساسية او نظريات معروفة عنها ؟

لقد اكد بسكال قيمة الرجوع الى التعريفات عنداختيار الطريقة عندما وضع قاعدته « Substitues mentalement les définitions à la place définis » « استبدل في ذهنك المصطلح المعرف بالحقائق التي تعرّفه » . وكذلك اكد هدامار (Hadamard) قيمة العودة الى التعريفات عند البحث عن الطريقة .

٨ – فالعودة الى التعريفات عملية من الاعمال الذهنية الهامة . وقد نعرف اهمية تعريف الكلمات اذا نحن نظرنا في اهمية الكلمات نفسها فنحن قلما نقدر على استعمال عقلنا من غير كلمات او اشارات او رموز من اي نوع . وهنا تكمن قوة الكلمات والاشارات. ولهذا نجد الشعوب البدائية تتوهم ان للكلمات قوة سحرية . ونحن اذ نجد تفسيراً لوهمهم هذا لا نشاركهم فيه لأنا نعرف ان قوة الكلمة لا تكمن في رنينها او في « حرارة نفس » قائلها وانما تكمن في الافكار التي تثيرها في اذهاننا وفي الحقائق التي تبنى عليها .

فمن حقنا اذن ان نبحث عن المعاني والحقائق وراء الالفاظ . والرياضي اذ يرجع الى التعريفات انما يفتش عن الروابط الرياضية التي تنطوي عليها المصطلحات كما يفتش الفيزيائي عن تجارب محددة وراء تعريفاته العلمية وكما يريد رجل الشارع الذكي ان يغوص الى الحقائق كيلا يضل في تيه الالفاظ .

التعميم : اذا وسعنا حلقة النظر في امر معين حتى شمل مجموعة امور تضمه او في فكرة محددة حتى وسعت فكرة اشمل تحويها فهذا هو التعميم .

١ – لنفرض اننا وقعنا صدفة على المجموعة .

١ + ٨ + ٢٧ + ٦٤ = ١٠٠

فقد نلاحظ انها يمكن ان توضع بالشكل العجيب

$١^٣ + ٢^٣ + ٣^٣ + ٤^٣ = ١٠^٢$

وهنا يتبادر الى الذهن ان نسأل هل يحدث كثيراً ان مجموع مكعبات كاملة مثل

$١^٣ + ٢^٣ + ٣^٣ + \ldots\ldots + ن^٣$

يكون مربعاً ؟ وهذا تعميم . وهو تعميم موفق اذ يفضي الى قانون عام رائع . وكثيراً ما توصل الناس الى نتائج رائعة في الرياضيات والفيزياء والعلوم الطبيعية بتعميم موفق كهذا .

راجع مادة : الاستقراء والاستقراء الرياضي .

٢ – وقد يفيدنا التعميم في حل المسائل واليك مسألة في الهندسة الفراغية :

« لدينا خط مستقيم وثماني منتظم وهما في وضعين مفروضين . فأوجد المستوى الذي يمر بالخط المستقيم ويقسم الثماني الى جزءين متساويين بالحجم » .

فهذه مسألة قد تبدو صعبة ولكن بعض المعرفة بشكل الثماني المنتظم تكفي لتوحي الينا بالتعميم التالي :

« لدينا خط مستقيم ومجسم له مركز تماثل وهما في وضعين معروفين فأوجد المستوى الذي يمر بالخط المستقيم ويقطع المجسم نصفين ». فالمستوى المطلوب يمر بالطبع بمركز التماثل للجسم وهو يتحدد بهذه النقطة وبالخط المستقيم . ولما كان للثماني المنتظم مركز تماثل فقد حلت المسألة .

ويلاحظ القارىء ان المسألة الثانية اعم من الاولى ولكنها رغم ذلك اسهل. والواقع ان عملنا الرئيسي في حل المسألة الاولى كان ابتكار المسألة الثانية . وبابتكارها تنبهنا الى الدور الذي يلعبه مركز التماثل فأبرزنا تلك الخاصة من خصائص الثماني التي تهمنا لحل المسألة وهي ان له مركز تماثل .

قد يكون السؤال الاعم اسهل حلاً ، وهذا يبدو من المتناقضات . فالعمل

الرئيسي في حل المسألة الخاصة كان ابتكار المسألة العامة ، وبعده لم يبق من العمل الا جزء ضئيل . ففي هذا المثال كان حل المسألة العامة جزءاً ضئيلاً من حل المسألة الخاصة انظر مادة : بدعة المخترع .

٣ — « أوجد حجم قطعة هرم مربع القاعدة مع العلم بان ضلع القاعدة السفلية ١٠ بوصات وضلع القاعدة العلوية ٥ بوصات وارتفاع القطعة ٦ بوصات » .

فاذا استعضنا عن الاعداد ١٠ ، ٥ ، ٦ برموز أ ، ب ، ع فهذا تعميم نحصل به على مسألة اشمل من المسألة الاصلية ، وهذه المسألة هي :

« اوجد حجم قطعة هرم مربع القاعدة مع العلم بأن ضلع قاعدتها السفلية أ وضلع قاعدتها العلوية ب وارتفاعها ع » .

وهذا تعميم قد يؤتي فائدة كبيرة ، فهنا نتحول عن مسألة عددية الى مسألة حرفية وبذا نتيح لأنفسنا امكانيات جديدة كتغيير المعطيات وتحقيق النتيجة بعدة طرق . انظر المادة : هل يمكنك تحقيق النتيجة ؟ ، ٢ والمادة : تغيير المسألة ، ٤ .

تغيير المسألة :

ان الحشرة « كما ذكرنا في مكان آخر » تحاول الفرار من النافذة المغلقة فهي تكر عليها مرة بعد مرة من غير ان تحاول ان تفرّ من نافذة اخرى بجوارها مفتوحة هي هي النافذة التي منها دخلت الى الغرفة . اما الفأر فقد يتصرف تصرفاً اذكى . فاذا هو وقع في شرك فانه يحاول ان يقلص نفسه كي يملص من بين قضيبين فاذا هو اخفق جرى الى قضيبين آخرين ثم آخرين . فهو ينوع محاولاته ويجرب كل الامكانيات . اما الرجل فقادر او هو ينبغي ان يكون قادراً على تنويع محاولاته تنويعاً اذكى وعلى تجربة الامكانيات بفهم اوسع وعلى ان يتعلم من اخطائه وفشله . والنصيحة السائرة : « حاول وحاول من

جديد » نصيحة جيدة تتبعها الحشرة ويتبعها الفـــأر ويتبعها الانسان . ولكن الذي ينجح اكثر من غيره هو الذي يغير مسألته بذكاء .

١ — في نهاية العمل عندما نحصل على الحل يكون فهمنا للمسألة اكمل واصلح مما كان في البدء . فعندما نحاول ان ننتقل من فهمنا الاول للمسألة الى فهم اصلح وانسب ننظر اليها من نواحي عدة ونحاول ان نرى لها وجوهاً عدة .

ونجاحنا في حل المسألة يعتمد على اختيـــارنا للوجه الذي ننظر اليه وعلى مهاجمتنا حصنها من ناحيته الضعيفة . فلكي نرى اي وجوهها هو الانسب لنـــا ، اي نواحيها هي الاسهل تناولا ، نجرب نواحيها المختلفة ووجوهها المختلفة —اننا نغير المسألة .

٢ — وتغيير المسألة امر جوهري . ولدينا عدة طرق لتوضيح هــذا الامر . فمن ناحية مـــا يبدو ان التقدم في حل المسألة يأتي عن طريق تعبئة معلوماتنا السابقة وتنظيمها . فعلينا ان نستخلص من ذاكرتنا عنــاصر معينة نضعهــا في المسألة . فتغيير المسألة يساعدنا في هذا الصدد . ولكن كيف ؟

اننا نتذكر الاشياء بضرب من الربط نسميه تداعي الافـكار . فما يدور في ذهننا في هذه اللحظة يجنح الى تذكيرنا بشيء ارتبط به في مناسبة سابقــة . ولا حاجة بنا ولا يتسع المجال للافاضة في ذكر نظرية تداعي الافـــكار او مناقشة حدودها . فبتغيير المسألة نأتي بنقـــاط جديدة فنستدعي روابط جديدة واحتمالات جديدة لحضور عناصر تتعلق بالمسألة .

٣ — ولا أمل لنا في حل أي مسألة ذات بال بــدون تركيز للذهن عميق . ولكن التركيز العميق على نقطة واحدة يجهدنا بسرعة فلكي نبقي انتبـــاهنا متيقظاً فلنغير النقطة التي نركز عليهـــا تفكيرنا فاذا لمسنا تقدماً في العمل فثمة جديد نعمله وثمــة نقاط جديدة نفحصها فانتباهنا في شغل شاغل واهتمامنــا في ازدياد . اما اذا نحن لم نتقدم فان انتباهنا يشرد واهتمامنا يفتر وعزيمتنــا تكلّ

وافكارنا تبدأ في تشتت وهناك خطر ضياع المسألة كلها . فلكي نتلافى هذا الخطر نتناول سؤالاً جديداً عن المسألة .

فالسؤال الجديد يكشف احتمالات لم نجربها اذ يؤدي الى تداعي روابط جديدة بمعلوماتنا السابقة وهو ينعش فينا الامل بالحصول على روابط ذات فائدة . والسؤال الجديد يستولي على اهتمامنا اذ يتيح لنا تغيير المسألة ، واظهارها من وجه آخر .

٤ — مثال : اوجد حجم قطعة هرم مربع القاعدة على فرض ان ضلع القاعدة السفلية أ وضلع القاعدة العلوية ب وارتفاع القطعة ع .

هذا سؤال يمكن ان يلقى على طلبة يعرفون قوانين الحجوم للمنشور والهرم. فان لم يأت الطلبة بفكرة من عندهم فبامكان المدرس ان يبدأ بتغيير المعطيات .

لنقل ان أ > ب فماذا يحدث لو تزايدت ب حتى صارت تساوي أ ؟ تصير القطعة منشوراً ويصير الحجم المطلوب $أ^{٢}$ ع .

ماذا يحدث لو تناقصت ب حتى صارت صفراً ؟ تصير القطعة هرماً ويصير الحجم المطلوب $\frac{أ^{٢} ع}{٣}$.

فتغيير المعطيات يكسب المسألة لذة . ثم هو قد يوحي باستعمال هذه النتائج بطريقة ما . ونحن على كل حال قد حصلنا على صفات محددة للنتيجة المطلوبة فالقانون الذي نسعى للحصول عليه يجب ان يكون بحيث يصير $أ^{٢}$ ع عندما تكون ب = أ ، و $\frac{أ^{٢} ع}{٣}$ عندما تكون ب = صفراً . ومن المفيد ان نتعرف على صفات للنتيجة التي نريد الحصول عليها .

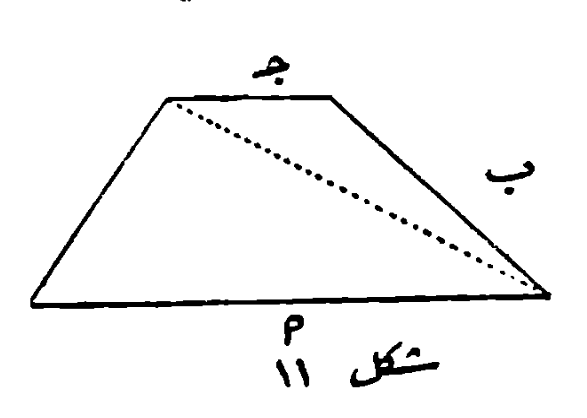
فهذه الصفات قد توحي باشياء ذات قيمة او نحن على الاقل نستطيع ان نحقق القانون عندما نحصل عليه . اذن فعندنا الآن جواب حاضر للسؤال: هل يمكنك ان تحقق النتيجة ؟

(انظر هذه المادة ، ٢) .

٥ – مثال ارسم شبه منحرف علمت اضلاعه الاربعة أ ، ب ، جـ، د .

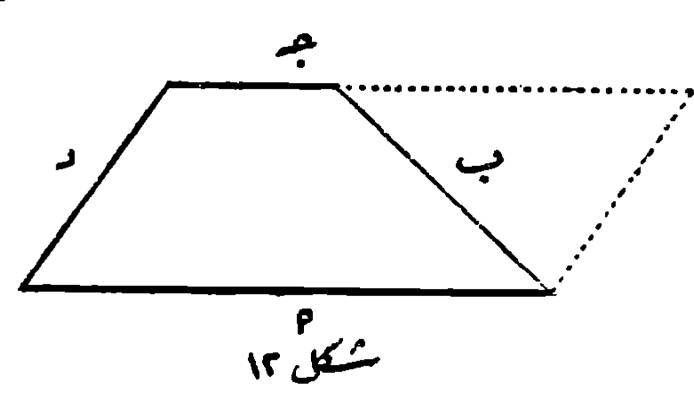
لتكن أ هي القاعدة السفلية ، جـ القاعدة العلوية ، أ و جـ متوازيين وغير متساويين ، ب و د غير متوازيين . فان لم تخطر على بالنا فكرة ، فلنبدأ بتغيير المعطيات .

ولنبدأ بشبه منحرف فيه أ > جـ . فماذا يحدث لو نقصت جـ حتى صارت صفراً؟ يصير شبه المنحرف مثلثاً . والمثلث شكل مألوف بسيط نستطيع ان نرسمه من شتى المعطيات . فلعل هناك فائدة نفيدها من ادخال هذا المثلث في الشكل . ونحن نستطيع ذلك اذا نحن رسمنا خطاً مساعداً واحداً هو قطر شبه المنحرف (شكل ١١) ولكن اذا فحصنا المثلث نجد انه يكاد لا يفيدنا في شيء فنحن نعرف فيه ضلعين أ ، د وينبغي ان نعرف ثلاث معطيات .



شكل ١١

فلنجرب شيئاً آخر : ماذا يحدث لو تزايدت جـ حتى صارت تساوي أ ؟ يصير شبه المنحرف متوازي اضلاع . هل يمكن ان نستعمله ؟ ان قليلاً من التفكير (شكل ١٢) يوجه انتباهنا الى المثلث الذي اضفناه الى شبه المنحرف الاصلي برسم متوازي الاضلاع . وهذا مثلث يسهل رسمه ، فنحن نعرف معطيات ثلاثة هي أضلاعه ب، د ، أ ـ جـ . فبتغيير المسألة الاصلية (رسم شبه المنحرف) وقعنا



شكل ١٢

على مسألة مساعدة اسهل (رسم المثلث) وباستعمال نتيجة المسألة المساعدة نحل المسألة الاصلية بسهولة (نكمل متوازي الاضلاع) . ومثالنا هذا نموذجي . وفشلنا في محاولتنا الاولى ايضاً نموذجي . فاذا اعدنا النظر فيها نجد انها لم تكن عديمة الجدوى ، بل كان بها فكرة ما أو فائدة ما . فهي على الاقل اتاحت لنا ان نفكر في رسم مثلث كواسطة للغاية التي نتوخاها . ونحن حصلنا على محاولتنا الثانية الناجحة بتعديل محاولتنا الاولى الفاشلة ، فغيرنا جـ : في الاولى انقصناها وفي الثانية زدناها .

٦ – وكما يبدو من المثال السابق ، كثيراً ما نضطر الى تعديل المسألة على وجوه شتى ، فنغيرها أو نضعها بعبارة جديدة او نحورها مرة بعد مرة حتى ننجح نهائياً في الحصول على شيء ذي فائدة . وقد نتعلم من الفشل وقد يكون ثمة فكرة طيبة في محاولة فاشلة وقد نصل الى محاولة ناجحة بتعديل أخرى لم تنجح . وما نحصل عليه بعد شتى المحاولات هو على الغالب مسألة مساعدة يسهل تناولها .

٧ – وهناك طرق معينة لتغيير المسألة وهي ذات فائدة كالعودة الى التعريف والتفكيك والربط من جديد وادخال عناصر مساعدة والتعميم والتخصيص واستعمال القياس .

٨ – وما سبق ذكره في (٣) عن الاسئلة الجديدة التي تستحوذ على انتباهنا من جديد ذو اهمية بخصوص استعمال ثبتنا استعمالاً مصيباً .

فالمدرس قد يستعمل الثبت ليساعد طلابه . فاذا تقدم الطالب فلا يبقى بحاجة الى المساعدة ، وينبغي على المدرس ان يتركه وشأنه كي يعمل عمله وحده . وهذا كما لا يخفى أدعى لتعويده على الاستقلال الذاتي . ولكن على المدرس ان يسأله السؤال المناسب اذا هو تعثر او توقف . فهناك الخوف ان يستشعر الطالب التعب من المسألة فيهملها او يفقد لذته فيها او يرتكب خطأ فاحشاً من جراء عدم اكتراثه بها .

ويمكن ان نستعمل الثبت في حل مسائلنا الخاصة . ولكي نستعمله الاستعمال المناسب نبدأ كما في المسألة السابقة . فاذا تقدمنا تقدماً محسوساً وصارت الافكار الجديدة تنبعث تلقائياً فمن الحمق ان نعيق تقدمنا هذا باسئلة غريبة . اما اذا توقف تقدمنا ولم يخطر لنا شيء جديد فالخوف ان نتعب من المسألة وهنـــاك الوقت المناسب للتفكير في فكرة عامة تساعدنا ، كسؤال أو توجيه من الثبت قد يكون مناسباً . ولنرحب بكل سؤال يرينا المسألة في ضوء جديـد فهو سيجعلنا نستحوذ مرة اخرى على انتباهنا ويجعلنا نستمر في عملنا وتفكيرنا .

التفكير الهورستيكي

هذه مرحلة في التفكير لا نعتبرها نهائية جازمة ولا نعتبرها رصينـة الا اننا نأخذ بها قصد اكتشاف حل للمسألة التي امامنا . ونحن كثيراً ما نلجأ الى التفكير الهورستيكي اما الجزم القاطع فلا يأتي الا بعد الوصول الى الحل التام . اما قبل ذلك فلا يضيرنا اذا نحن قنعنا بتقدير معقول نوعاً ما . فنحن نحتاج الى الوقتي قبل النهائي ، ونحتاج الى التفكير الهورستيكي لنصل الى البرهان القاطع كما نحتاج الى الدعائم الخشبية لاقامة البنيان المتين ، انظر المادة : امارات التقدم.

والتفكير الهورستيكي كثيراً ما يبنى على الاستقراء او المقابلة . انظر مادة : الاستقراء .. والاستقراء الرياضي ، ومادة : المقابلة ، ٨ ، ٩ ، ١٠ * .

والتفكير الهورستيكي نفسه شيء سليم . ولكن ما ليس سليماً هو خلط هذا التفكير بالبرهان اليقيني واسوأ من ذلك الاستعاضة به عن البرهان اليقيني .

وان تعليم بعض الموضوعات ، ولا سيما حساب التفاضل والتكامل لطلاب الهندسة والفيزياء ، ليتحسن تحسناً ملموساً لو ان طبيعة التفكير الهورستيكي فهمت فهماً احسن ، ومزاياه ونقائصه اعترف بها اعترافاً صريحاً ، ولو ان الكتب

---

* انظر ايضاً بحثاً للمؤلف في :

American Mathematical Monthly, vol. 48, pp. 450-465 .

الدراسية اخذت الحجج الهورستيكية بشكل علني فان الحجة الهورستيكية اذا عرضت بصورة جذابة صريحة قد تكون ذات فائـدة كبيرة ، اذ هي تمهد للحجة القاطعة وتحمل عادة بعضاً من جذورها . ولكن الحجـة الهورستيكية تكون ضارة اذا عرضت بشكل غامض يطويه الخجل وينشره الخداع . انظر مادة : لماذا البرهان ؟

التفكيك والربط من جديد

عمليتان من اهم العمليات الذهنية :

فعندما تفحص شيئاً اثار اهتمامك او تحدى فضولك ، اي شيء ، بيتاً تريد ان تستأجره او برقية هامة برموز سرية ، او امرأ يحيرك مرماه ومصدره أو مسألة تريد لها حلاً — انك حين تفحصه ، تبـــدأ بفكرة عامة ، بصورة له في ذهنك قد لا تكون محددة المعالم . ثم تنظر في الامر فتلمح نقطة تركز عليهـــا انتباهك ثم يجتذب انتباهك نقطة اخرى ، ثم هو يتحول الى نقطة جديدة — تفاصيل تتبدى لك فرادى فيقلبها نظرك في مجموعات شتى ، حـتى تعود فتنظر في الامر كله على ضوء جديد .

انك تفكك الكل الى اجزاء ، ثم تضم هذه الاجزاء في كل جديد ، قريب من الكل القديم او بعيد .

١ — فاذا انت امعنت النظر وراء التفاصيل ، فقد تضيعك التفاصيل ، ذلك ان الوفرة منها كالقلة متعبة للذهن ، وقد تمنعك من اعطاء النقطة الرئيسية حقها من عنايتك او قد تحجبها عنك بالمرة ، ولعلك تذكر ان الذي في الغابة تحجبها عنه اشجارها .

ونحن بالطبع لا نريد ان نضيع الوقت في تفاصيل لا تجدي ، ونريـد ان نوفر جهودنا لما هو جوهري ولكن المشكلة اننا لا نملك ان نتنبـأ اي التفاصيل ستكون هي الجوهرية وايها لا يجدي .

فلذا نبدأ بفهم المسألة كوحدة عامة ، فاذا تم لنا ذلك صرنا اقدر على تمييز النقاط التي قد تكون جوهرية . فاذا ما فحصنا منها واحدة او اثنتين صرنا في مركز احسن يمكننا من تمييز النقاط التي قد تستحق فحصاً ادق . وهكذا نلجأ الى التفاصيل فنفكك المسألة تدريجياً ولكن الى حد لا يتجاوز ما تقتضيه الحاجة .

وطبيعي ان المدرس لن يتوقع ان يتصرف كل طلابه بحكمة في هذا الامر . فان بعض الطلاب ينصبون على التفاصيل قبل ان يفهموا المسألة فهماً عاماً ، وهذا من احمق الحمق واسوأ العادات .

٢ – ولننظر الآن في المسائل الرياضية التي من نوع « مسائل الايجاد » .

فبعد ان نفهم المسألة فهماً عاماً ونعرف مرماها والنقطة الرئيسية فيها ننصرف الى التفاصيل . فمن اين نبدأ ؟ ان ما يقتضيه العقل ان نبدأ دائماً بالنظر في الاجزاء الرئيسية للمسألة وهي المجهول والمعطيات والشرط وفي كل حالة تقريباً يستحسن ان نبدأ فحص المسألة التفصيلي بالاسئلة : ما المجهول ؟ ما المعطيات ؟ ما الشرط ؟

واذا شئنا ان نفحص تفاصيل اخرى فماذا نعمل ؟ كثيراً ما يكون من المستحسن ان نفحص كل واحدة من المعطيات على حدة ، وان نفصل اجزاء الشرط بعضها عن بعض ونفحص كل جزء على جدة وقد نجد لزاماً علينا اذا استعصت المسألة ان نزيدها تفكيكاً وان ندرس مزيداً من التفاصيل .

وهنا قد يقتضي الامر ان نعود الى تعريف بعض المصطلحات وان نأخذ بعين الاعتبار العناصر الجديدة التي تنطوي عليها هذه التعريفات وان نفحص هذه العناصر التي ادخلناها .

٣ – وبعد تفكيك المسألة نعود الى ربط اجزائها بشكل جديد . ونحاول بصورة خاصة ان نربط هذه الاجزاء على شكل يجعل منها مسألة جديدة اسهل تناولاً قد نستعملها كمسألة مساعدة .

وهناك لا شك عدد من امكانيات الربط . والمسائل الصعبة تتطلب طرقاً خفية استثنائية مبتكرة . وعبقرية الذي يحل المسألة تتبدى اصالتـه في ربط اجزائها . ولكن ثمة طرقاً للربط مألوفة ، سهلة نسبياً، تكفي للمسائل البسيطة وهذه ينبغي ان نفهمها فهماً اكيداً ونبدأ بتجربتها حتى وان ادى الامر في النهاية الى الاستعاضة عنها بطرق اقل وضوحاً .

واليك تصنيفاً شكلياً ترتب فيه بوضوح اعم طرق الربط واكثرهـا نفعاً . ففي استخراج مسألة جديدة من المسألة التي امامنا يمكن :

(١) ان نحتفظ بالمجهول ونغير ما سواه (المعطيات والشرط) ، او

(٢) ان نحتفظ بالمعطيات ونغير ما سواها (المجهول والشرط) ، او

(٣) ان نغير المجهول والمعطيات معاً .

ولندرس هذه الحالة :

(الحالتان ١ ، ٢ ، متشاركتان . وواقـع الأمر أن بالامكان ان نحتفظ بالمجهول والمعطيات ونغير المسألة بتغيير الشرط وحده . وكمثـل على ذلك نورد المسألتين التاليتين ، وهما تبدوان متكافئتين ولكنهما اذا شئنا الدقـة ليستا كذلك :

ارسم مثلثاً متساوي الاضلاع ضلعه معلوم .

ارسم مثلثاً متساوي الزوايا ضلعه معلوم .

والفرق بين النصين اذا كان يبدو طفيفاً في هذا المثال قد يكون عظيم الشأن في حالات اخرى . وهي حالات لهـا اهميتها من بعض الوجوه ولكن يضيق المجال عن تفصيلهـا هنا . قارن المادة : المسألة المساعدة ، ٧ ، الملاحظة الأخيرة) .

٤ – فالاحتفاظ بالمجهول وتغيير المعطيات والشرط من اجـل تغيير المسألة

المعطاة اكثر ما يكون ذا فائدة . والتوجيـــه انظر الى المجهول يستهدف حصر الذهن في المسائل التي لها المجهول نفسه .

وقد نحاول ان نتذكر مسألة من هذا النوع سبق حلها ، ونحاول ان نتذكر مسألة مألوفة لها هذا المجهول او مجهول يشبهه . فاذا نحن اخفقنا في تذكر مسألة كهذه فقد نبتكر مسألة : هل يمكنك ان تفكر في معطيات جديدة تلزم لايجاد المجهول ؟

ورب مسألة جديدة ذات صلة وثيقة بالمسألة التي امامنا تكون اكثر فائدة. فلذا نحتفظ بالمجهول ونحاول الاحتفاظ ببعض المعطيات وبعض الشرط ثم نغـير ما بقي — اقل تغيير ممكن ، واحدة او اثنتين من المعطيات وجزءاً صغـيراً من اجزاء الشرط . والطريقة الجيدة هي التي تنطوي على حذف شيء دون اضافة شيء آخر ، فنحتفظ بالمجهول ونحتفظ ببعض الشرط ونتغاضى عن الباقي ولكن لا ندخل شيئاً جديداً في الشرط ولا في المعطيات . (والامثلة والملاحظات على هذه الحالة تأتي بعد ٧ ، ٨) .

٥ — الاحتفاظ بالمعطيات : قد نحاول ان ندخـــل مجهولاً جديداً يفيدنا ويكون سهل التناول . ومثل هذا المجهول نأتي به من المعطيات . وهو ما نعنيه عندما نسأل السؤال : هل تستطيع ان تستنتج شيئاً يفيدك من المعطيات ؟

والذي نريده هنا امران : اولهما ان يكون هذا المجهول سهل التناول اي يسهل الحصول عليه من المعطيات والثاني ان يكون هذا المجهول مفيداً اي ان الحصول عليه يسهّل الى حد ما البحث عن المجهول الاصلي . وقصارى القول انه يجب ان يكون المجهول الجديد موطىء قدم نصل منه الى المجهول الاصلي كحجر في وسط الجدول : فهو اقرب الينا من الضفة التي نريد العبور اليهـا فاذا نحن وصلنا اليه صرنا اقرب الى تلك الضفة .

فالمجهول الجديد نريده ان يكون سهل التناول ومفيداً في آن واحد . هذا

ما نريده الا اننا في الواقع قد نضطر الى القناعة بأي شيء يرجى منه بعض الفائدة وربما نقبل ايضاً ان نحاول مجهولاً ذا صلة بالمجهول الاصلي حتى وان لم يبدُ منذ البدء انه سهل التناول .

فاذا كانت المسألة ان نحصل على قطر متوازي المستطيلات (كما في القسم ٨) فقد ندخل قطر احد وجوهه كمجهول جديد . ونحن قد نعمل ذلك لأنا نعرف اننا اذا حصلنا على قطر الوجه نستطيع ان نحصل على القطر المطلوب (كما في القسم ١٠) او قد نعمل ذلك لأنا نرى ان الحصول على قطر الوجه سهل ونشتبه في انه قد يساعدنا في الحصول على القطر المطلوب (قارن مادة : هل استعملت كل المعطيات ؟ ، ١) .

واذا كانت المسألة ان نرسم دائرة فعلينا ان نجد شيئين : مركزها ونصف قطرها . فيمكن ان نقول ان المسألة ذات قسمين . وفي بعض الحالات يكون الحصول على احد القسمين اسهل فيجدر اذن في كل حالة ان ننظر في هذا الاحتمال : هل يمكنك ان تحل جزءاً من المسألة ؟ وبهذا السؤال نوازن الاحتمالات فنرى هل الأولى ان ننصرف الى نصف القطر ام الى المركز فنتخذه المجهول الجديد ؟ واسئلة كهذه كثيراً ما تكون ذات فائدة ، وفي المسائل المعقدة والمسائل العالية قد تأتي الفكرة الحاسمة باقتطاع فرع من المسألة سهل التناول جوهري .

٦ – تغيير المجهول والمعطيات معاً . هذا يستدعي الابتعاد عن المسألة الاصلية اكثر من ذي قبل . وهذا ما لا نريده بالطبع اذ يكمن وراءه خطر فقدان المسألة الرئيسية كلها . ولكننا قد نُلزم على مثل هذا التغيير الواسع اذا عجزت التغييرات الاخرى عن اعطاء شيء يسهل تناوله او يفيد وقد يغرينا بالابتعاد عن المسألة الاصلية ان المسألة الجديدة أوسع املاً بالنجاح . هل يمكنك ان تغير المجهول او المعطيات او كليهما اذا لزم الامر حتى يكون المجهول الجديد والمعطيات الجديدة بعضها اقرب الى البعض الآخر ؟

ومن الطرق الشائقة لتغيير المجهول والمعطيات معاً استبدال المجهول واحدى المعطيات كلاً بالآخر (انظر مادة : هل يمكنك ان تستعمل النتيجة ؟ ، ٣) .

٧ — مثال : ارسم مثلثاً قاعدته أ وزاوية رأسه أ والارتفاع النازل من الرأس على القاعدة ع.

ما المجهول ؟ مثلث .

ما المعطيات ؟ خطان أ ، ع ، وزاوية أ .

شكل ١٣

فاذا كنا قد الفنا مسائل العمليات الهندسية فسنحاول تبسيط هذه المسألة حتى تصير مسألة تعيين نقطة . نرسم مستقيماً ب جـ يساوي الطول المعلوم أ . فكل ما يبقى ان نعين رأس المثلث أ المقابل للضلع ب جـ . انظر شكل ١٣ . فهذا في الواقع سؤال جديد .

ما المجهول ؟ النقطة أ .

ما المعطيات ؟ الخط ع والزاوية أ والنقطتان ب ، جـ في موضع معين .

ما الشرط ؟ البعد العمودي للنقطة أ عن المستقيم ب جـ يجب ان يساوي ع ، < ب أ جـ = أ .

اذن فقد حولنا المسألة بتغيير المجهول والمعطيات معاً. فالمجهول الجديد نقطة والمجهول القديم مثلث وبعض المعطيات ما تزال لم تتغير : الارتفاع ع والزاوية أ . ولكن في المسألة القديمة اعطينا الطول أ والآن اعطينا النقطتين ب ، جـ بدلا منه .

والمسألة الجديدة ليست صعبة والتوجيه التالي يقرب الينا الحل :

افصل اجزاء الشرط بعضها عن بعض ، وللشرط هنا جزءان. احدهما يتعلق بالارتفاع ع والآخر بالزاوية أ والنقطة المطلوبة يراد ان تكون :

I – على بعد ع من المستقيم ب ج * ،

II – رأس زاوية معلومة يمر ضلعاها بالنقطتين ب ، ج .

فاذا احتفظنا بجزء من الشرط وتغاضينا عن جزء فان النقطة لا تحدد لاننا نجد عدة نقاط تفي بالشرط الاول وهي كل نقط المستقيم الذي يوازي ب ج ويبعد عنه بمقدار ع * فهذا المستقيم هو المحل الهندسي للنقط التي تفي بالشرط الاول . والمحل الهندسي للنقط التي تفي بالشرط الثاني هو قوس دائرة طرفاه في ب ، ج . فاذا رسمنا المحلين الهندسيين فحيث يتقاطعان فثمة النقطة المطلوبة .

وهذه الطريقة التي اتبعناها هنا تهمنا بشكل خاص اذ يمكن ان نحتذيها في حل مسائل العمليات الهندسية : حول المسألة الى تعيين نقطة ثم عين النقطة كتقاطع محلين هندسيين .

واحدى خطوات هذه الطريقة ذات اهمية اكثر شمولاً ، ففي حل اي مسألة من « مسائل الايجاد » نستطيع ان نحذو حذوها ايضاً : احتفظ ببعض الشرط واهمل الباقي . وهذا يضعف شرط المسألة بالطبع ويقلل تحديد المجهول. فالى اي مدى يكون المجهول عندئذ محدداً ؟ كيف يتغير ؟ وهذا السؤال يؤدي في الواقع الى مسألة جديدة . فاذا كان المجهول نقطة في مستوٍ (كما في المثال السابق) فالحل يتطلب المحل الهندسي لهذه النقطة . واذا كان المجهول شيئاً رياضياً من نوع آخر (كان مربعاً في القسم ١٨) فعلينا ان نكتشف الصفات لمميزة لمجموعة اشياء من نوع هذا المجهول . حتى اذا كان المجهول شيئاً غير رياضي (كما في المثال القادم في ٨) فقد يكون من المفيد ان نجمع الاشياء التي تحقق احد الشروط المفروضة على المجهول في المسألة ونكتشف الصفات التي تميزه من بينها .

٨ – مثال : في مسألة انجليزية في الكلمات المتقاطعة مما يعتمد على التلاعب

---

* المستقيم ب ج يقسم المستوي الى نصفين فنختار احد هذين النصفين لنعين أ فيه ولذا نقول ان هنالك مستقيماً واحداً يوازي ب ج والا لزم ان نعتبر ان المحل الهندسي مستقيان لا واحد.

بالالفاظ نجد ما يلي : « من اليمين ومن اليسار ، جزء في آلة (٥ احرف) » .

ما المجهول ؟ كلمة انجليزية .

ما الشرط ؟ الكلمة بخمسة احرف وهي تتعلق بجزء ما من آلة ما ، وقد تكون ، على ما نأمل ، من الكلمات المألوفة .

هل الشرط كافٍ لتعيين المجهول ؟ كلا . او لعله يكفي ، ولكن ما نفهمه منه الآن غير كافٍ . فهنالك عدة كلمات بخمسة احرف مثل Lever, Screw وغيرها .

والشرط موضوع بشكل غامض ، عن قصد لا شك . فاذا لم نجد ما يكون جزءاً من آلة عن يمينها وعن يسارها فقد نستنتج ان المعنى المقصود ان الكلمة تقرأ يمنة ويسرة . ومن المناسب ان نفسح مجالاً لهذا الاحتمال .

افصل اجزاء الشرط بعضها عن بعض . فالشرط ذو جزءين احدهما يتعلق بمعنى الكلمة والآخر بحروفها . فالكلمة يلزم ان تكون :

(I) قصيرة تعنى جزءاً من آلة ،

(II) بخمسة احرف اذا قرأت يمنة او يسرة تعني جزءاً من آلة ايضاً .

فاذا اخذنا احد الجزءين واهملنا الثاني فالمجهول لا يتحدد نهائياً لأن هنالك عدة كلمات تفي بالجزء الاول من الشرط . وهنا نوع من المحل الهندسي يمكن ان نتابعه حتى يقاطع المحل الهندسي للشرط الثاني والاجراء الطبيعي ان نركز الذهن في القسم الاول من الشرط ، فنتذكر كلمات لها المعنى المطلوب ، ثم ننظر اذا كان لها عدد الحروف المطلوب وكانت تقرأ يمنة ويسرة . وقد نتذكر عدة كلمات قبل ان نقع على الكلمة المناسبة فهنالك : Motor, Lever, Screw, Shaft, Wheel, Hinge, Rotor اجل ، الكلمة المطلوبة بالتأكيد .

٩ – في ٣ عددنا الامكانيات لربط بعض عناصر المسألة التي امامنا من

« مسائل الايجاد » قصد الحصول على مسألة جديدة . ولكنا قد نحصل على مسألتين او اكثر ، لا مسألة واحدة . وهذا احتمال نكتفي بالاشارة اليه .

ومن الاحتمالات ايضاً ان حل مسألة من « مسائل الايجاد » قد يعتمد على حل مسالة من « مسائل الاثبات » وهذا ايضاً نكتفي بالاشارة اليه رغم اهميته ، ويضيق المجال عن تفصيله .

١٠ — ولكن لا مندوحة لنا عن اضافة ملاحظات قصيرة بشأن « مسائل الاثبات » وان تكون تطابق ما ذكرنا عن « مسائل الايجاد » (من ٢ الى ٩).

فعندما نفهم المسألة بوجه يجب على الغالب ان نفحص جزءيها الرئيسين : المفروض والمطلوب وان نتفهمها فهـــماً جيداً . ما المفروض ؟ ما المطلوب ؟ فاذا اردنا مزيداً من التدقيق في التفاصيل فيمكن ان نفصـل اجزاء المفروض بعضها عن بعض وننظر في كل جزء على حدة ، ثم قد نحتاج الى تفاصيل اخرى فنزيد المسألة تفكيكاً ، ثم نحاول ربط اجزائها على صورة جديدة تجعل منها نظرية جديدة . ولدينا هنا ثلاث امكانيات :

(١) ان نبقي المطلوب على حاله ونغير المفروض فنحاول ان نتذكر نظرية من هذا النوع . انظر الى المطلوب وحاول ان تتذكر نظرية فيها هذا المطلوب او مطلوب يشبهه . فاذا عجزنا عن ذلك فقد نبتكر نظرية جديدة . هـــل تستطيع ان تجد مفروضاً جديداً نستنتج منه المطلوب بسهولة ؟ وقد نلجأ الى تغيير المفروض بحذف جزء منـــه دون ان نضيف شيئاً اليه . احتفظ ببعض المفروض واترك الباقي هل يبقى ما يطلب اثباته صحيحاً ؟

(٢) نبقي المفروض على حاله ونغير المطلوب . هل نستطيع أن نستنتج من المفروض شيئاً يفيدك ؟

(٣) نغير المفروض والمطلوب معاً . ونحن نميل الى تغييرهما معاً ان لم يُجدِ تغيير اي منهما وحده . هل يمكنك ان تغير المفروض ، او المطلوب او كليهما اذا لزم الأمر الى مفروض ومطلوب جديدين اقرب الى بعض ؟

ولن نحاول ان نفصل هنا الامكانيات المختلفة التي نجدها عندما نأتي بمسألتين او اكثر من « مسائل الاثبات » في سبيل حل مسألة من هذا النوع ، او عندما نربط المسألة بمسألة من نوع « مسائل الايجاد » .

التقدم في العمل وانجازه

هل احرزت اي تقدم ؟ ما الشيء الجوهري الذي انجزته ؟ قد تسأل نفسك اسئلة من هذا النوع وانت تحل مسألتك ، او قد توجهها لطلابك وانت تشرف على حلهم . وهذا يتيح لك أن تحكم بشيء من الثقة على مدى التقدم الذي تم في حالات معدودة محددة . ولكن النقلة من هذه الحالات المحددة الى وصف عام لمدى التقدم في العمل ليست بالسهلة . الا أنه لا بد من هذه النقلة اذا شئنا أن نجعل دراستنا للهورستيكا كاملة ولا بد من توضيح العناصر التي يتألف منها بوجه عام التقدم في العمل وانجازه .

١ – فلكي نحل مسألة ما يجب أن يكون لدينا بعض المعرفة عن موضوعها ويجب ان نجمع وننتقي عناصر معلوماتنا السابقة الكامنـة في اعماق الذاكرة وفهمنا للمسألة في نهايتها يحوي اكثر بكثير مما كان عليه في بدايتها. فماذا زدنا عليه؟ زدنا ما استطعنا أن نستخلصه من الذاكرة . فلكي نحصل على الحل علينا ان نسترجع حقائق عديدة متنوعة : مسائل سبق حلها ، ونظريات سبقت دراستها وتعريفات شتى عرفناها . واستخلاص هــذه العناصر من الذاكرة يمكن ان نسميه التعبئة او الحشد .

٢ – ولكي نحل مسألة ما لا يكفي أن نتذكر حقائق منفصلا بعضها عن بعض بل يلزم أن نربط بين هذه الحقائق بشكل يلائم المسألة . فعند حل مسألة نبتكر حجة تربط الحقائق المنفصلة في كل عام . وهذا الربط والملاءمة بـين الحقائق يمكن أن نسميه بالتنظيم .

٣ – والحق ان حشد المعلومات وتنظيمها لا يمكن فصل احدهما عن الآخر.

فنحن اذ نركز الذهن على مسألة يستعيد ذهننا من الحقائق ما يتصـــل بسبب قريب او بعيـــد بهذه المسألة فلا يكون ثمة ما نربط وننظم الا ما استعدناه وحشدناه .

فحشد المعلومات وتنظيمها وجهان فقط من عملية واحدة معقـدة متعددة الوجوه .

٤ — ومن الوجوه الاخرى لتقدمنا في العمـل ان طراز ادراكنا له تغير . فادراكنا اذ يزداد ثروة بالمعلومات التي نستعيدها ونكيفها له وندمجها فيه يغدو في النهاية أوفى واكمل مما كان في البدء . ولكي نصل بادراكنا من صورتـــه الابتدائيـة الى صورة انسب واحسن ننظر في المسألة من نواحي مختلفة ونقلبها على وجوه عدة ، وقـد يتعذر علينا أن نحرز اي تقدم في العمل بدون تغيير المسألـة .

٥—وبينا نحن نتقدم صوب الهدف النهائي نراه اكثر واكثر وكلما ازدادت رؤيتنا له أيقنا ان قد زاد قربنا منه . وكلما تقدم تفحصنا للمسألة أمكن تنبؤنا عما يجب عمله من اجل الحل وكيف يجب أن يعمل . فنحن اذ نحل مسألة رياضية قـــد يحالفنا الحظ فنرى نظرية سابقة يجب تطبيقها او مسألة سابقة يمكن الاستفادة منها ، او عودة الى المعنى الدقيق لمصطلح تقني لا بد منها . وهذا امر قد لا نراه بعين اليقين ولكنا نقدر تقديراً انه معقول . فاليقين نصل اليـــه فقط عندما يكتمل الحل . أما قبـــل ذلك فيكفينا التقدير . وبدون هذه الاعتبارات التقديرية المعقولة لا نصل الى الحل اليقيني النهائي . اننا نحتـــاج الى التفكير الهورستيكي .

٦ — وما هو التقدم نحو الحل ؟ انه تعبئة معلوماتنا وتنظيمها وتطوير فهمنا للمسألة وزيادة مقدرتنا على ادراك الخطوات التاليـــة التي يتألف منها الحل النهائي . ونحن قد نتقدم بثبات وخطى بطيئة ولكننا بعد حين وحين نتقدم

فجأة بطفرات وقفزات. والقفزة الفجائية نحو الحل هي الفكرة النيرة او الفكرة الطيبة أو وقدة الذهن (ولها اصطلاح فني مناسب في الالمانية هو Einfall) .
وما الفكرة النيرة ؟ انها تغير مفاجىء في وجهة النظر ، تعديل مفاجىء لفهمنا للمسألة ، ادراك واثق مفاجىء لخطوات نخطوها من اجل الحل .

٧ — وما تقدم يتضمن اسئلة الثبت وتوجيهاته المناسبة والاساس الذي بنيت عليه . فكثير منها يستهدف بصورة مباشرة حشد معلوماتنا السابقة المكتسبة مثل : هل رأيتها من قبل ؟ ام هل رأيتها بشكل قريب ؟ هــل تعرف مسألة ذات صلة بمسألتك ؟ هل تعرف نظرية قد تفيدك ؟ انظر الى المجهول ، وحاول ان تجد مسألة تعرفها فيها المجهول هذا او مجهول يشبهه .

وهنالك حالات كثيرة نرى فيها ان قد عبأنا المعلومات المناسبــة فننصرف الى تنظيمها تنظيماً مناسباً : هذه مسألة تتصل بمسألتك وقد حللتها من قبل ، فهل يمكن ان تفيد منها ؟ هل يمكنك ان تفيد من نتيجتها ؟ هل يمكنك ان تفيد من طريقتها ؟ هل يلزم أن تدخل عنصراً مساعداً يمكنك من ان تستفيد منها ؟

وهنالك حالات كثيرة نشعر فيها اننا لم نجمع بعــد ما يكفي من مواد . فنتساءل ماذا ينقصنا : هل استعملت كل المعطيات ؟ هل استعملت كل الشرط ؟ هل اخذت بعين الاعتبار كل المبادىء التي تنطوي عليها المسألة ؟

وبعض الاسئلة تستهدف بصورة مباشرة تغيير المسألة : هل يمكنك اعادة المسألة بعبارة من عندك ؟ هل يمكنك ان تعيدها بشكل آخر ؟ وثمــة اسئلة كثيرة تستهدف تغيير المسألة بطرق خاصة مثل العودة الى التعريف او استعمال المقابلة او التعميم او التخصيص او تفكيك المسألة وربطها من جديد . وهناك اسئلة اخرى ايضاً تستهدف ان تحاول ادراك طبيعة الحل الذي تجاهد للحصول عليه : هل يمكن ان يتحقق الشرط ؟ هل الشرط كافٍ لتعيين المجهول ؟ أم هو لا يكفي ؟ أم فيه لغو ؟ ام فيه تناقض ؟

واسئلة الثبت وتوجيهاته لا تذكر بصورة مباشرة الفكرة النيرة ولكنها كلها في الواقع تحوم حولها . ففهم المسألة يمهد للفكرة النيرة ، وابتكار الخطة يوحي بها ، وعندما نراها ننفذ خطتنا ، ثم نحن حين نعيد النظر في خطوات الحل ونتيجته انما نحاول ان نستغل الفكرة النيرة احسن استغلال * .

التماثل

للتماثل معنيان مألوفان معنى خاص هندسي ، ومعنى عام منطقي .

فالهندسة الفراغية الابتدائية تعترف بنوعين من التماثل ، التماثل بالنسبة الى سطح ما (يسمى سطح التماثل) والتماثل بالنسبة الى نقطة ما (تسمى مركز التماثل) . والجسم الانساني يبدو أنه متماثل الى حد ما ولكنه في الواقع غير متماثل . فكثير من الاعضاء الداخلية ليست متماثلة الوضع أما التمثال فقد يكون تام التماثل بالنسبة الى مستوٍ رأسي يقسمه الى نصفين متماثلين حتى ليبدو انه يمكن « استبدال » كل منهما بالآخر .

وحسب المعنى العام للكلمة نعتبر الكل متماثلاً اذا كان يحوي اجزاء يمكن استبدالها بعضها ببعض . وهذا يؤدي الى عدد من ضروب التماثل تتباين بعدد الاجزاء القابلة للاستبدال والعمليات اللازمة لهذا الاستبدال . فالمكعب مثلاً ذو تماثل عظيم فوجوهه الستة يمكن استبدالها بعضها ببعض وكذلك رؤوسه الثمانية وحافاته الاثنتا عشرة . والعبارة ص ع + ع س + س ص متماثلة فاي اثنين من الرموز س ، ص ، ع ، يمكن استبدال أحدهما بالآخر دون أن تتغير العبارة .

والتماثل بمعناه العام يهمنا في بحثنا هذا . فاذا كانت المسألة متماثلة على شكل

---

* اكثر موضوعات هذه المادة شرحت مفصلة في مقالة للمؤلف في :
(Acta Psychologica Vol. 4, (1938), pp. 113 - 170) .

ما فقد نستخلص ما يفيدنا من اجزائها القابلة للاستبدال بسهولة ، ومن المفيد ان نعالج هذه الاجزاء (التي تلعب ادواراً متماثلة في المسألة) بطريقـــة واحدة . (انظر المادة : العناصر المساعدة ، ٣) .

فالاشياء المتماثلة تعالج بطرق متماثلة فلا تهدم بدون مبرر التماثـل الطبيعي . ولكننا قد نضطر احياناً ان نعالج الاشياء المتماثلة بصورة غير متماثلة. فالقفازان حتماً متماثلان ولكن لا احد يعالجهما بالتماثل ، فلا احد يلبسهما في وقت واحد انما نلبسهما واحداً بعد الآخر .

والتماثل قد يفيد ايضاً في تحقيق النتائج . انظر القسم ١٤ .

التناقض

انظر مادة : الشرط .

تنفيذ الخطة

وضع الخطة وتنفيذها امران مختلفان . ويصدق هذا على المسائل الرياضية ، فان بين ادراك الخطة وتنفيذها فرقاً في طبيعة العملية نفسها .

١ – ففي سبيل الوصول الى الحجة القاطعة النهائية قد نستعمل حججاً موقتة كل ما في امرها ان العقل يستصوبها ، كما تستعمل الدعائم الخشبية لتسند الجسر اثناء بنائه . وكما تزال هذه الدعائم اذا تم البناء فيبقى الجسر قائمـــاً ، فكذلك نستغني عن كل الحجج الموقتة الاستصوابية اذ نتقدم في الحل ونستبقي الحجـة القاطعة وحدها .

فعند ابتكار خطة الحل ينبغي الا نخشى الاعتماد على مبدأ استصوابي محض او تفكير هورستيكي فكل شيء صحيح اذا هو ادى الى فكرة صحيحة .ولكن عندما نشرع في تنفيذ الخطة يتغير الموقف فلا نقبل الا الحجج القاطعة الدقيقة .

عند تنفيذ خطة الحل حقق كل خطوة . هل تستطيع ان ترى بوضوح ان الخطوة صحيحة ؟ وكلما زادت عنايتنا بتحقيق خطوات الحل اثناء تنفيذ الخطة امكن استعمال التفكير الهورستيكي في محاولة ابتكارها بامان .

٢ — وينبغي ان نعطي جانباً من العناية للترتيب الذي نضع به تفاصيل الخطة ، لا سيما اذا كانت المسألة معقدة . فنحن يجب الا نحذف شيئاً من التفاصيل وان نفهم علاقة كل منها بالمسألة كما يجب ألا يغيب عن اذهاننا الرابطة بين الخطوات الرئيسية ، وكل هذا يقتضي ان نسير بالترتيب المناسب.

فالتفاصيل الثانوية لا يعقل ان نشغل بتحقيقها قبل ان يقوم ما يدعو الى الاعتقاد بان الخطوات الرئيسية في حجتنا سليمة . فاذا كان ثمة صدع في المجرى الرئيسي للطريقة فلا يفيد معه تحقيق أي من التفصيلات الثانوية .

والترتيب الذي نتبعه عند السير في خطوات الطريقة قد يختلف اختلافاً كبيراً عن الترتيب الذي به نبتكر هذه الخطوات . والترتيب الذي نكتب به التفاصيل في شكلها النهائي قد يغايرها جميعاً . ارأيت كيف يعرض اقليدس في اصوله تفاصيل حجته عرضاً رصيناً نظامياً قلّده كثيرون وانتقده كثيرون ؟

٣ — فعند اقليدس تتجه كل الحجج في اتجاه واحد ، من المعطيات الى المجهول في « مسائل الايجاد » ومن المفروض الى المطلوب في « مسائل الاثبات ». فكل عنصر جديد ، كل نقطة او خط ، الخ ، يستنتج استنتاجاً صحيحاً من المعطيات او من العناصر التي استنتجت استنتاجاً صحيحاً في خطوات سابقة . وكل حقيقة جديدة يجب ان يبرهن عليها برهاناً صحيحاً من المفروض او من حقائق تم اثباتها في خطوات سابقة . وكل عنصر جديد او حقيقة تختبر حالما تظهر ثم ينتهي امرها . وهكذا نركز الذهن في الخطوة التي امامنا ، لا يهمنا ما مضى ولا يهمنا ما هو آتٍ ، وآخر عنصر جديد نريد تحقيقه هو المجهول وآخر حقيقة جديدة نريد اثباتها هي المطلوب ، واذا كانت خطواتنا كلها صحيحة كانت الخطوة الاخيرة ايضاً صحيحة وكانت الطريقة كلها صحيحة .

ان طريقة اقليدس يمكن ان نوصي بها بعزم وبلا تحفظ اذا كان القصد فحص الطريقة بالتفصيل لا سيما اذا كانت الطريقة طريقتنا وكانت طويلة معقدة نحن عثرنا عليها ونحن فحصنا خطواتها المريضة ولم يبق الا ان نفحص تفاصيلها واحدة واحدة — فلا شيء افضل من كتابة الحجة كلها على طريقة اقليدس .

ولكن طريقة اقليدس لا يمكن ان نوصي بها بدون تحفظ اذا كان القصد نقل الحجة الى قارىء او سامع لم يعلم بها من قبل . فطريقة اقليدس رائعة في اظهار نقاط الحجة المختلفة ولكنها ليست بهذه الروعة في اظهار الخطر الرئيسي للطريقة العامة . والقارىء الذكي يرى بسهولة ان كل خطوة صحيحة ولكنه يجد صعوبة كبيرة في ادراك مصدرها وغايتها وارتباطها بالطريقة العامة .

وسبب هذه الصعوبة ان عرض اقليدس كثيراً ما يسير في اتجاه يعاكس الترتيب الطبيعي لابتكار الطريقة . (ان عرض اقليدس يتتبع بلا هوادة النظام « التركيبي » انظر مادة : بابس ، لا سيما الملاحظات ٣ ، ٤ ، ٥) .

٤ — فصفوة القول ان طريقة اقليدس اذ تمضي بلا هوادة من المعطيات الى المجهول ومن المفروض الى المطلوب طريقة مثلى لتحقيق تفاصيل الحجة ولكنها بعيدة عن المثالية في تفهيم الخط الرئيسي للحجة .

وانا لنرغب رغبة اكيدة ان يفحص الطلاب طريقتهم على غرار اقليدس مبتدئين من المعطيات الى المجهول محققين كل خطوة وان يكن ذلك لا داعي الى المغالاة في فرضه . ولكن ليس من المرغوب فيه ان تعرض عدة براهين بهذه الطريقة ، وان تكن عظيمة الفائدة اذا جاءت بعد مناقشة للمسألة تجري كما يوصي هذا الكتاب بطريقة يكتشف بها الطلاب بمساعدة المدرس الفكرة الرئيسية بتفكير مستقل بقدر الامكان . ومن المرغوب فيه ايضاً الطريقة التي تتبعها

بعض الكتب المدرسية اذ تبدأ بعرض هيكل بديهي للفكرة الرئيسية ثم تتبعه فيما بعد بالتفاصيل معروضة على طريقة اقليدس .

٥ – والرياضي المدقق حين يريد ان تقتنع نفسه بصحة نظريته يحاول ان يراها ببداهة بالاضافة الى البرهان الشكلي . هل ترى بوضوح انها صحيحة ؟ هل يمكنك ان تثبت صحتها ؟ وشأن الرياضي المدقق في ذلك شأن السيدة المدققة في في السوق اذ هي كما تقتنع بنوع النسيج تريد ان تراه وان تلمسه . فرؤية الحقيقة بالبداهة والبرهان الشكلي عليها سبيلان مختلفان لإدراكها وهما لازمتان لزوم حاستي الرؤية واللمس لادراك الشيء المادي .

والادراك البديهي قد يسبق البرهان الشكلي فكل طالب ذكي يدرك ان كل مستقيمين يوازيان ثالثاً متوازيان (سواء كانت المستقيمات الثلاثة او لم تكن في مستوى واحد) . وهو يدرك ذلك حالما يفهم معناه ومن غير دراسة منظمـــة للهندسة الفراغية ، الا ان برهان ذلك كما ورد في نظرية ٩ من كتاب اقليدس الحادي عشر يحتاج الى استعداد طويل دقيق ومهارة كبيرة .

وكذلك المعالجة الشكلية للقواعد المنطقية والبراهين الجبرية قد تسبق حدود البداهة ، فكل فرد يستطيع أن يرى في لحظة أن ٣ مستقيمات تؤخذ لا على التعيين تقسم المستوى الى ٧ اقسام (انظر الى القسم الوحيد المحدود منهـــا وهو المثلث الذي تحده هذه المستقيمات) ولكن قلما نجد من يستطيع مهما اجهـــد خياله ان يدرك ان ٥ مستويات تؤخذ لا على التعيين تقسم الفضاء الى ٢٦ قسماً . ولكن هذا يمكن اثباته اثباتاً رصيناً ، وهو اثبات ليس بالطويـــل وليس بالصعب .

فعند تنفيذ خطتنا نحقق كل خطوة ، وفي تحقيق الخطوات نعتمد على البداهة ونعتمد على البرهان الشكلي . والبداهة تسبق البرهان الشكلي احياناً واحياناً يسبقها ، ومن التمرينات الشائقة المفيدة ان نجرب البرهان بالطريقتين . هـــل

ترى بوضوح ان الخطوة صحيحة ؟ نعم أراها بوضوح وجلاء — فهنا البداهة سابقة . ولكن هل يلحق بها البرهان الشكلي ؟ هل يمكنك ايضاً ان تبرهن عليها ؟

وفي محاولتنا اثبات ما نراه بداهة بالبرهان الشكلي ورؤية ما نثبته بالبرهان تمرين عقلي يشحذ الذهن ولكن المؤسف اننا لا نجد دائماً الوقت الكافي لذلك في غرفة الدرس والمثال الذي شرحناه في القسمين ١٢ ، ١٤ مثال نموذجي على ذلك .

الحذلقة والدراية :

هذان تصرفان متضادان تجاه القوانين :

١ — اما تطبيق القانون حرفياً ، بصرامة وبلا تفكير حيث يليق وحيث لا يليق ، فهذا حذلقة . وبعض المتحذلقين حمقى فهم لا يفهمون القاعدة التي يطبقونها بنزاهة نادرة وبلا تمييز . وبعضهم قد يكون حالفه النجاح بادىء ذي بدء (قبل ان يصير متحذلقاً) ففهم قانوناً يصح في اغلب الاحيان واتخذ منه قاعدة له فهو قلما يخطىء .

واما تطبيق القانون بسلاسة طبيعية وبحكمة وبتمييز للحالات التي فيها يليق ، ومن غير ان يتاح لنص القانون ان يطغى على روحه واهدافه او على الاحتمالات الخاصة للأوضاع المختلفة فهذه دراية .

٢ — واسئلة الثبت وتوجيهاته نريد منها ان تكون عوناً للذي يحل التمارين بنفسه وعوناً للمدرس . ولكن قبل كل شيء يجب ان تفهم وان يعرف كيف تستعمل استعمالاً . ومعرفتنا تتأتى بالتجربة والخطأ ، بالفشل والنجاح ، بالخبرة التي تكتسبها بالمران على استعمالها . ثم ان استعمالها لا يجوز ان يصير حذلقة فلا يسأل سؤال ولا يلقي توجيه بدون تمييز او بحكم العادة . كن مستعداً لتنويع

الاسئلة والتوجيهات واستعمل حكمتك وحسن تصرفك . وانت قادم على مسألة صعبة مثيرة فكل خطوة تخطوها ينبغي ان تنجم بصورة طبيعيـــة عن نظر مدقق وذهن صاف . وانت تريد ان تساعد تلميذك ولذا يجدر ان تصـــدر كل كلمة تقولها عن تفهم لمشاكله وعطف عليه .

اما اذا شئت ان تتحذلق وكان لا بد من قاعدة تتبعها بـــلا هوادة فاليك هذه : استعمل عقلك دائماً وقبل كل شيء .

حلال المسائل الذكي :

يسائل نفسه اسئلة كالتي في ثبتنا قد يكون اكتشفها بنفسه او قد يكون سمعها من غيره . فادرك طريقة استعمالهـــا ، فهو من حيث لا يشعر يكررها مرة بعد مرة . او لعل سؤالاً يستهويه بشكل خاص لأنه جزء من تكيفه الذهني تجاه مرحلة معينة من مراحل الحل فهو يستدعيه كي يتيح لنفسه هذا التكيف.

وحلال المسائل الذكي قد يجد في اسئلة ثبتنا وتوجيهاته ما يفيده . وهو قد يفهم الشروح والامثلة التي توضح احد الاسئلة ولكنه يستشعر شكاً من حيث استعماله الاستعمال المناسب فلكي يفهمه الفهم الصحيح عليه ان يجرب متابعـــة العملية الذهنية التي يقتضيها السؤال فاذا هو تابعها فقد يدرك فائدة سؤالـــه ويكتشف بنفسه كيفية استعماله .

وحلال المسائل الذكي يجدر به ان يكون مستعداً لأن يسأل كل اسئلـــة الثبت على الا يحاول ذلك الا عن امعان دقيق بالامر تنبعث من ملكته وتفكيره لا مسيراً ولا مطواعاً .

وعليه ان يدرك وحده هل الحالة التي امامه تشبه الشبه الكافي او لا تشبه الحالة التي رأى فيها السؤال يؤتي ثمرته المطلوبة .

وحلال المسائل الذكي يحاول قبل كل شيء ان يفهم مسألته باتم واجلى مـــا

يستطيع . الا ان الفهم وحده لا يكفي فعليه ان يركز ذهنه فيها وان تتوفر لديه الرغبة في حلها . فان لم يجد الرغبة الكافية فخير له ان يرجىء الحل الى حين . فان السر المكشوف للنجاح الحقيقي هو ان تنصرف بكيانك كله الى مسألتك .

رياضي المستقبل :

يمكن ان تتوقع من شخص ان يصير رياضياً اذا كان ماهراً في حل المسائل . ولكن المهارة وحدها لا تكفي . فمع مضي الوقت عليه ان يحل مسائل رياضية بارزة . وقبل كل شيء عليه ان يجد بنفسه الى اي نوع من هذه المسائل يميل بطبيعته .

واهم ما في اي حل بالنسبة اليه هو مراجعة الحل عندما يكتمل . فاذا هو مر بنظره على طريقته وعلى الشكل النهائي للنتيجة فهنالك قد يجد ما لا حد له من امور تستحق عنايته . فهو قد يتأمل مواطن الصعوبة في المسألة والفكرة الحاسمة . وهو قد يحاول ان يتبين ما عاقه وبماذا تغلب عليه في النهاية . وهو قد يبحث عن مبادىء بديهية بسيطة : هل يمكنك ان تتصورها بلمحة ؟ وهو قد يقارن او يستكمل طرقاً مختلفة للحل : هل يمكنك ان تستنتج النتيجة بطريقة اخرى ؟ وهو قد يوضح مسألته الحاضرة بمقارنتها بمسائل سبق حلها . وهو قد يحاول ان يبتكر مسائل جديدة يحلها على اساس حله الذي اكتمل : هل يمكنك ان تستعمل النتيجة او الطريقة في حل مسألة اخرى ؟ فاذا هو هضم المسألة التي حلها هضماً تاماً فانه يكتسب معرفة منظمة تنظيماً جيداً مهيأة للاستعمال.

ورياضي المستقبل كغيره يتعلم بالمحاكاة والتمرين . فعليه ان يبحث عن النموذج المناسب او المثل الاعلى الذي يحاكيه فليراقب المدرس الذي يفتق الاذهان بفعاليته ، وليتبارَ مع صديق له قدير ، وعليه الا يكتفي بالكتب المدرسية الدارجة بل ان يقرأ أيضاً للمؤلفين المتازين حتى يجد منهم من يستشعر في نفسه ميلاً طبيعياً لتقليده . ثم عليه ان يحصل على ما يبدو له سهلاً او مفيداً أو

جميلاً ويتسلى به . ويجدر به أن يحل التمارين ويختـــار منها ما يساير ميوله ويتأمل حلولها ويبتكر تمارين جديدة . فبهذه الطرق وبكل طريقـــة اخرى عليه ان يصل الى اول اكتشافاته الهامة : وهي اكتشاف ما يحبه وما يكرهه ، ذوقه واتجاهه الخاص .

الشرط

جزء اساسي في « مسائل الايجاد » . انظر مادة : مسائل الايجاد ومسائـل الاثبات وانظر ايضاً مادة : المصطلحات ، قديمها وحديثها ، ٢ .

ويكون في الشرط لغو اذا كان يحوي عناصر فضولية لا تلزم في الحـل . ويكون فيه تناقض اذا كانت عناصره تتضارب حتى لا نجد ما يفي به .

فاذا كان التعبير الرياضي عن الشرط يحوي معادلات تزيد عن عدد المجاهيل كان في الشرط لغو او تناقض . واذا كان التعبير عنه يحوي معادلات تنقص عن عدد المجاهيل كان الشرط غير كاف لتعيينها . واذا كان التعبير عنـــه يحوي معادلات بقدر المجاهيل فهو عادة يكفي لتعيينها ولكن قد يكون فيه احياناً تناقض او نقص .

طريقة الخلف وطريقة البرهان غير المباشر

هاتان طريقتان مختلفتان ولكنهما مترابطتان .

فطريقة الخلف تبين بطلان فرض من الفروض عن طريق استنتاج نتيجة منه بطلانها ظاهر . وهي طريقة رياضية فيها شبه بالتورية عنـد الادباء الساخرين . ففي التورية قد يؤخذ رأي ما بأسلوب ظاهره الجد ولكنه يصور الرأي بصورة تظهر كل ما فيه من سخف .

اما طريقة البرهان غير المباشر فتثبت صحة الحقيقــة باثبات ان عكسها باطل . وفي هذا شبه بما يصنع دهاة السياسة في الانتخابات عندما يعمل احـد المتنافسين في سبيل الفوز ما يشوه سمعة خصمه .

وكلا الطريقتين ، طريقة الخلف وطريقــة البرهان غير المباشر ، أداتان قويتان للابتكار ويسهل ان تخطرا على بال المرء حين يفكر بمسألته . ولكن عدداً من الفلاسفة وكثيراً من المبتدئين يكرهونهما . وهذا غير مستغرب فالادباء الساخرون ودهاة السياسيين لا يرضى عنهم كل الناس . وسنوضح شأن الطريقتين بامثلة ثم نناقش الاعتراضات عليهما بعد ذلك .

١ – طريقة الخلف : اكتب اعداداً على أن تستعمل كلاً من الارقام العشرة مرة واحدة فحسب وبحيث يكون مجموع الاعداد ١٠٠ .

قد نجد في حل هذه الاحجية ما يستحق أن نتعلمه ، ولكن نصها بحاجــة الى توضيح .

ما المجهول ؟ مجموعة اعداد . ونعني بها هنا اعداداً صحيحة .

ما المعطيات ؟ العدد ١٠٠ .

ما الشرط ؟ للشرط جزءان : اولهما كتابة الاعداد المطلوبة بحيث نستعمل كلاً من الارقـام ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ مرة واحــدة فحسب . والثاني ان يكون مجموع هذه الاعداد التي نكتبها ١٠٠ .

خذ جزءاً من الشرط واهمل الباقي . فالجزء الاول من الشرط يسهل تحقيقه فالمجموعة ١٩ ، ٢٨ ، ٣٧ ، ٤٦ ، ٥٠ كل واحد من الارقام يرد فيهـا مرة واحدة . ولكن الجزء الثاني من الشرط لم يتحقق طبعاً فان مجموع الاعداد ١٨٠ وليس ١٠٠ . فلنحاول مرة ثانية .

١٩ + ٢٨ + ٣٠ + ٧ + ٦ + ٥ + ٤ = ٩٩ .

وهذا يفي بالجزء الاول من الشرط ويكاد يفي بالجزء الثاني فعندنا ٩٩ بدل ١٠٠ .

وكذلك يسهل تحقيق الجزء الثاني من الشرط اذا اهملنا الجزء الاول .

١٩ + ٢٨ + ٣١ + ٧ + ٦ + ٥ + ٤ = ١٠٠ .

فهذا لا يفي بالجزء الاول لأن الرقم ١ استعمل مرتين والصفر لم يستعمل ابداً فلنجرب مرة ثانية :

قد نجرب بضع مرات فنجد أننا نفشل في ايجاد مجموعة تفي بالشرطين معاً . وهنا تبرز المسألة : اثبت انه يستحيل تحقيق الشرط كله في مجموعة واحدة .

وهذه المسألة قد تبـــدو حتى لأحسن الطلاب انها فوق مستواهم . ولكن يسهل اعطاء الجواب اذا أحسنا التصرف . فعلينا ان نفحص حالة نفرض فيها انها تفي بالشرطين معاً .

لقد قامت الشبهة على ان الشرطين لا يمكن ان يتحققا معاً وقد ابرز لنا ذلك خبرتنا الناشئة عن تجاربنا في حل المسألة . ولكن لنجابه المسألة بذهن صاف ولننظر في الحالة التي افترضناها وافترضنا او ادعينا انها تحقق الشرطين معاً . فنحن الآن نتخيل مجموعة اعداد حاصل جمعها ١٠٠ فهـذه يجب ان يكون كل عدد منها من رقم او رقمين . اذن فعندنا أرقام في منزلة الآحاد وارقـام في منزلة العشرات . ثم ان الارقام كلها عشرة ارقام مختلفة من الصفر الى ٩ ، وكل منها يأتي في مجموعتنا التي فرضناها مرة واحدة . ونحن نعرف ان مجموع هـذه الارقام هو :

٠ + ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ٦ + ٧ + ٨ + ٩ = ٤٥

وبعضها في المجموعة المفروضة يرمز الى آحاد وبعضها الى عشرات . وهنا توحي لنا الفطنة ان مجموع ارقام العشرات ذو شأن في المسألة فلنعتبر ان هـذا

المجموع ع . فينبغي ان يكون مجموع ارقام الآحاد ٤٥ – ع . فمجوع الاعداد اذن :

$$١٠ ع + (٤٥ – ع) = ١٠٠$$

وهذه معادلة يراد ان نجد قيمة ع فيها. وهي معادلة من الدرجة الاولى وتعطي

$$ع = \frac{٥٥}{٩}$$

ولكن هنا خطأ ما لا شك . فقد نتج معنا ان ع ليست عدداً صحيحاً وهي يجب حسب المفروض ان تكون عدداً صحيحاً . اذن فعندما افترضنا ان جزأي الشرط يتحققان في مجموعة اعداد قادنا هذا الافتراض الى نتيجة غير صحيحة . فكيف نفسر ذلك ؟ نفسره بان افتراضنا الاصلي خاطىء فلا يمكن ان يتحقق جزءا الشرط في مجموعة واحدة . واذن فقد وصلنا الى هدفنا وبرهنا على ان جزأي الشرط لا يتلاءمان .

وهذا الطراز من الاستنتاج هو طراز نموذجي لطريقة الخلف .

٢ – ملاحظات : فلننظر الى هذا الطراز مرة اخرى لنتفهم مرماه العام . نريد ان نبرهن على ان من المستحيل تحقيق شرط معين اي ان الحالة التي تفي بكل اجزاء الشرط معاً ليس لها وجود . فقبل ان نثبت شيئاً من ذلك نعتبر ان هذه الحالة يمكن ان توجد . فنحن بمجابهتها ودراستها دراسة دقيقة نستطيع ان نتبين فيها نقاط الخطأ ولا بد من أن نقع على نقطة خاطئة فيها حتى نستطيع أن نقيم الحجة الدامغة على استحالة وجودها فالاجراء الذي به نجحنا في حل المثال السابق اجراء معقول بوجه عام : نتفحص حالة مفترضة نعتبرها تفي بالشرط كله رغم اننا قد نرى ان هذه الحالة بعيدة الاحتمال .

والقارىء الخبير تتبدى له هنا نقطة اخرى . فقد كانت الخطوة الرئيسية في حلنا السابق هي وضع معادلة في ع وقد كان بالامكان ان نصل الى تلك المعادلة دون ان تقوم لدينا شبهة بان المسألة خاطئة فعند وضع معادلة نعتبر ان كل

اجزاء الشرط يمكن تحقيقها ونعبر عن ذلك بلغة رياضية رغم اننا لم نعرف بعد اذا كان بالامكان ان تتحقق اجزاء الشرط كلها .

فاجراؤنا صريح غير متحيز سواء بحثنا عن المجهول الذي يفي بالشرط أو حاولنا ان نثبت ان الوفاء بالشرط غير ممكن ، لا فرق بينهما . وبحثنا اذا احسنا السير فيه يبدأ من نقطة واحدة هي فحص الحالة المفترضة التي تفي بالشرط وهي في نهايتها فقط تدل على ان الشرط لا يمكن ان يتحقق .

قارن مادة : الاشكال ، ٢ . وقارن ايضاً مادة : بابس . فالتحليل الذي ينتهي باثبات بطلان النظرية المعطلة أو باثبات ان مسألة الايجاد المعطاة ليس لها حل هو طريقة الخلف .

٣ — الحل غير المباشر : الاعداد الاولية هي : ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١ ، ١٣ ، ١٧ ، ١٩ ، ٢٣ ، ٢٩ ، ٣١ ، ٣٧ ، ... وهذه لا يمكن تحليلها الى عوامل ابسط منها مع انها اكبر من ١ . (والقسم الاخير من الجملة اشارة الى اننا نستثني الواحد من الاعداد الاولية وهو طبعاً لا يحلل الى عوامل ابسط منه ولكنه من طبيعة أخرى ويجدر استثناؤه) . فالاعداد الاولية هي « العناصر » التي تتحلل اليها كل الاعداد . مثلاً :

$$٦٣٠ = ٢ \times ٣ \times ٣ \times ٥ \times ٧ .$$

اذن فقد حللنا العدد الى خمسة اعداد اولية مضروب بعضها ببعض .

فهل الاعداد تتناهى ام هي غير متناهيــــة ؟ من الطبيعي ان نقدر انها لا تتناهى فاذا نحن قدرنا أنها تتناهى فمعنى ذلك أن كل الاعداد قاطبــة يمكن تحليلها إلى عدد محدود من العناصر وفي ذلك ما يصور الكون كلــــه « كشيء ضئيل » . وهنا تبرز مسألة اثبات أن الاعداد الاولية لا تتناهى .

وهذه مسألة تختلف عن مسائل الرياضيات الابتدائيــة المألوفة وهي تبدو لاول مرة صعبة التناول . الا انه يبدو ، كما تقدم ، انه من غير المحتمـــل ان

يكون هناك عدد اولي ل هو آخر هـــذه الاعداد الاولية . ولماذا نرى هذا غير محتمل ؟

لنقابل هذه الحالة ، غير المحتملة ، وجهاً لوجه . فنعتبر ، نفترض ، ان ثمة عدداً ل هو اكبر الاعداد الاولية . واذن فبامكاننا حصر هذه الاعداد في مجموعة هي ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١ ، ... ، ل . ولماذا يكون هذا غير محتمل ، ما الخطأ فيه ؟ هل يمكن ان نضع يدنا على نقطة فيه هي خطأ حتماً ؟ يمكن بالتأكيد . فلنأخذ العدد :

ك = (٢ × ٣ × ٥ × ٧ × ١١ × ... × ل) + ١

فالعدد ك اكبر من ل وهو حسب افتراضنا لا يمكن ان يكون اولياً . اذن فهو يقبل القسمة على عدد اولي . ولكن الاعداد الاوليـــة كلها امامنا ، كما افترضنا . انها الاعداد ٢ ، ٣ ، ٥ ، ... ، الا ل . اننا اذا قسمنا ك على أي من هذه الاعداد يبقى باق هو ١ . اذن ك لا يقبـــل القسمة على اي من الاعداد الاولية المفروضة . فهنا اذن خطأ بالتأكيد .

ان ك لا يكون الا عدداً اولياً او عدداً لا يقبـــل القسمة على عدد اولي . فعندما بدأنا بافتراضنا ان الاعداد الاولية محدودة اكبرها ل وصلنا الى نتيجـة خاطئة . فكيف نفسر ذلك ؟ نفسره بان افتراضنا الاصلي خاطىء . فلا يمكن ان يكون هنالك عدد هو آخر الاعداد الاولية واذن فقـد نجحنا في اثبات ان مجموعة الاعداد الاولية لا نهاية لها .

وبرهاننا مثل للبرهان غير المباشر (وهو برهان مشهور جاء به اقليدس . انظر النظرية ٢٠ في الجزء التاسع من الاصول) .

واذن فقد اثبتنا نظريتنا (ان الاعداد الاولية لا تنتهي) باثباتنا ان خلافها باطـل (وخلافها هو أن الاعداد الأوليـــة تنتهي عند حـد ما) وقد اثبتنا ذلك بان استنتجنا منه نتيجة بطلانها ظاهر . اذن لقد دمجنا البرهان غير

المباشر بطريقة الخلف . وهذا الدمج عمل نموذجي هنا .

٤ ــ الاعتراضات : لقـــد تعرضت طريقتا الخلف والبرهان غير المباشر الى اعتراضات كثيرة وهذه الاعتراضات التي اثيرت قد تكون صوراً متعددة لاعتراض رئيسي نبحثه هنا بشكل « عملي » في مستوى بحثنا العام .

ان العثور على برهان غير ظاهر عمل ذهني وذو شأن ، وكذلك تعلم هـــذا البرهان او فهمه فهماً دقيقاً يحتاج الى مجهود ذهني . ونحن بالطبع نميـــل الى الاحتفاظ بشيء من هذا المجهود . ويجب بالتأكيد ان يكون ما نحتفظ بـه في ذاكرتنا صحيحاً صادقاً لا خطأ ولا كاذباً .

ولكن يبدو من الصعب ان نحتفظ بشيء صادق صحيح من خطوات طريقة الخلف . فالطريقة تبدأ من فرض خاطىء وتستخلص منه نتائج خطؤها كخطئه أو هو اظهر ، حتى نصل الى نتيجة الخطأ فيها ظاهر للعيان . فاذا كنا لا نرغب في الاحتفاظ بنتائج خاطئة في ذاكرتنا فيجب أن ننسى كل هذه الخطوات في الحل . وهذا امر غير ممكن لأن كل الخطوات يجب ان تبقى في ذاكرتنا واضحة جلية الى أن يكتمل البرهان .

بعد هذا يمكن ان نذكر الاعتراض على البرهان غير المباشر بشكل موجز . فنحن اذ نستمع الى هـــذا البرهان نركز انتباهنا على افتراض خاطىء يجب أن ننساه لا على النظرية الصحيحة التي يجب أن نتذكرها .

ولكي نزن هذه الاعتراضات بميزان عادل ينبغي ان نمـيز بين طريقة الخلف كأداة للبحث وبينها كوسيلة لعرض البرهان ، وان نميز هـــذا التمييز نفسه في طريقة البرهان غير المباشر .

ويجب ان نعترف ان طريقـــة الخلف كوسيلة لعرض البرهان ليست خيراً كلها . وقد نمضي في تكرار التحفظ الذي بدأنا به افتراضنا ولكن هذا يصبح ، لا سيما اذا كانت خطوات الحل كثيرة ، عبئاً على القارىء والسامع . وكل النتائج

نستنتجها بطريقة صحيحة ولكن كل العلاقات التي تنشأ مستحيلة . حتى اذا جرى البحث شفهياً فهذا لا يخفف من وطأة التكرار على أذن السامع ، تكرار أن الامر كله تعتمد صحته على صحة الافتراض الاصلي . فلا بد من تكرار الكلمات : « فرضاً » ، « اذا صح اعتبارنا » ، « حسب افتراضنا » وما شاكل ذلك . ثم نحن نرفض الافتراض وننساه كشيء مستحيل ولكننا نستبقيه امام بصائرنا كأساس لخطوات حلنا ، وهذا قد يصير شيئاً غير محتمل .

الا أن من الحمق ان نضرب بطريقة الخلف عرض الحائط كأداة من ادوات الاكتشاف . فهي قد تبدو لنا بصورة طبيعية حيث تفشل الوسائل الاخرى في الوصول الى الحل ، كما يتبين من الامثلة السابقة . وبشيء من الخبرة يتبين لنا أن ليس ثمة تناقض جوهري بين موقفينا . فالخبرة تشير الى أنه ليس من الصعب ان نحول البرهان غير المباشر الى برهان مباشر او أن نرتب برهاناً بطريقة الخلف بشكل انسب تتلاشى فيه طريقة الخلف (او ترد بجمل قصيرة قاطعة) .

وصفوة القول اننا اذا شئنا ان نستغل امكانياتنا كلها يجب ان نتعرف على طريقة الخلف والبرهان غير المباشر . فاذا نحن نجحنا في ايجاد حل بواسطة اي منهما فلا ينبغي أن نتردد في اعادة النظر في حلنا والتساؤل : هل يمكن ان نحل المسألة بطريقة اخرى ؟

ولنمثل على ذلك بأمثلة .

٥ — اعادة ترتيب طريقة الخلف : لنعاود النظر في تفكيرنا الذي بيناه في ١ . فهنا بدأت طريقة الخلف عند حالة تبين في النهاية انها مستحيلة . ولنقتطع الآن من حجتنا هناك ذلك القسم الذي لا يعتمد على افتراضنا الخاطىء ويحتوي على معلومات ايجابية . فاذا راجعنا ما صنعناه نجد أن ما هو صحيح لا شك فيه انه اذا كتبت اعداد من منزلة او منزلتين بحيث تظهر فيها الارقام العشرة كل واحدة مرة فحسب فان مجموع هذه الاعداد من النوع

١٠ ع + (٤٥ – ع) = ٩ (ع + ٥) .

فالمجموع اذن يقبل القسمة على ٩ . ولكن المسألة المعطاة تطلب ان يكون المجموع ١٠٠ . فهل هذا ممكن ؟ كلا . فان ١٠٠ لا تقسم على ٩ .

وهكذا فقد تلاشت طريقة الخلف من برهاننا هذا الجديد .

وبهذه المناسبة نقول ان القارىء الذي يعرف « طريقة حذف التسعات » يرى الآن بلمحة مبدأ الطريقة كله .

٦ – تحويل البرهان غير المباشر : ولنعد النظر فيما صنعناه في ٣ . فاذا راجعنا ذلك بدقة فقد نجد أن ثمة عناصر لا تتأثر صحتها بافتراضنا الخاطىء . ولكن خير من ذلك أن نعيد النظر في معنى المسألة الاصلية : ماذا نعني بقولنا ان مجموعة الاعداد الاولية لا تنتهي ؟ نعني ما يلي : اذا نحن تأكدنا من وجود عدد محدود من هذه الاوليات مثل ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١ ، ... ، ل حيث ل هو آخر هذه الاوليات المعروف لغاية الآن فهناك دائماً عدد اولي غيرها . اذن فما العمل لاثبات ان عدد الاعداد الاولية لا ينتهي ؟

ان نبين طريقة لايجاد عدد اولي غير ما عندنا من هذه الاعداد . واذن « فمسألة البرهان » تحولت الى « مسألة ايجاد » : اذا اعطيت الاعداد الاولية ٢ ، ٣ ، ٥ ، ... ، ل فأوجد عدداً أولياً ن غير المعطاة سابقاً .

وبوضع مسألتنا بهذا الشكل نكون قد خطونا الخطوة الرئيسية في سبيل الحل . فقد صار الآن سهلاً ان نستعمل الاجزاء الجوهرية في حلنا الماضي من اجل حل جديد . فان العدد

ك = (٢ × ٣ × ٥ × ٧ × ١١ × ... × ل) + ١

يقبل القسمة على عدد اولي بالتأكيد . فلنعتبر ن اي عدد اولي يقسم ك « وليكن اصغر الاوليات » .

(وطبيعي انه اذا اتفق ان كان ك اولياً فان ن = ك) فواضح انه اذا

قسم ك على اي من الاوليات التي عندنا ٢ ، ٣ ، ٥ ، ... ، ل يبقى ١ فاذن ك لا يقبل القسمة على اي منها . ولذا فان ن لا يمكن ان يساوي ايا من هذه الاوليات وهذا كل ما نريده . لأن ن عدد اولي غير اعداد المجموعة ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١ ، ... ، ل .

وفي هذا البرهان طريقة مرسومة لمد اعداد مجموعة الاوليات بدون حد . وليس فيها شيء غير مباشر ، ولا وضع مستحيل ينبغي اعادة النظر فيه . ولكنه اساساً لا يختلف عما جاء في طريقة البرهان غير المباشر . اذن فقد نجحنا في تحويل تلك الطريقة الى طريقة لا اعتراض عليها .

العزم والامل والنجاح

من الخطأ ان نظن ان حل المسألة قضية ذكاء محض . فان العزم والحماس يلعبان في ذلك دوراً هاماً . وقد يكون العزم الفاتر والطاعة الخاملة كافيين لعمل شيء ما في سبيل حل مسألة روتينية في حجرة الدرس ، ولكن حل مسألة علمية جدية يقتضي قوة ارادة تصمد سنين طويلة للجهد الدائم والفشل المرير .

١ — والعزم يؤججه الامل والرضى ويخمده اليأس والخيبة . فمن السهل ان نثابر على عملنا اذا كنا نحسب ان النجاح منا قريب ، ولكن من الصعب ان نظل على مثابرتنا حين نقع في ورطة ولا نرى منها مخرجاً . وقد نستشعر الزهو والعجب اذا تحقق ما رسمناه ونستشعر الخيبة والانكسار اذا برزت عقبة في الطريق الذي انتهجناه واثقين فتثني عزيمتنا وتزعزع همتنا .

والمثل القائل « قد تعمل بلا امل وتثابر ولا نجاح » قد ينادي به ذو عزيمة صلبة أو غاية شريفة ، رجل يقدس الواجب ، نبيل يخدم قضية نبيلة . ولكن مثل هذه العزيمة لا تجدي مع رجل العلم فهو لا بد له من بارقة امل تحدوه وقبس

نجاح يغريه ، فالبحث العلمي لا يستغني عن قدر مقدور من العزيمة . وقدر مقدور من الامل . فانت لا تتناول مسألة الا اذا اثارت اهتمامك او لذتك ، وانت لا تنصرف اليها جاداً الا اذا لمست فيها ما يزيدك علماً ، ثم انت تنصب عليها بكيانك ومشاعرك اذا داعبك امل عظيم وعندما توطن امرك فسرْ في سبيلك ولكن لا تقم في طريق سيرك العراقيل بنفسك . وبوارق النجاح الباهتة لا تستهين بها بل فتش عليها . اذا لم تستطع حل المسألة المعطاة لك فجرب ان تحل أولاً مسألة ذات صلة بها .

٢ – وعندما يخطىء طالب خطأ فاحشاً او يبطىء بطئاً محنقاً فالسبب دائماً واحد : انه لا يجد الرغبة في حل المسألة ، ولا الرغبة في فهمها فهماً صحيحاً فهو من ثم لا يفهمها . فاذا أراد المدرس حقاً ان يساعد الطالب فينبغي منه قبل كل شيء ان يثير نزعة التطلع عنده وان يوحي اليه بالرغبة في الحل . وعلى المدرس ايضاً ان يتيح بعض الوقت للطالب كي يوطن عزمه ويصرف للواجب ذهنه .

وتعليم حل المسائل تثقيف للارادة ، والطالب حين يحل مسائل ليست سهلة عليه ان يتعلم ان يثابر رغم الفشل وان يقدر خطوات النجاح القصيرة وان يصبر على الفكرة الجوهرية حتى تبين وان يركز كل ذهنه وهمه فيها اذا تبدت . فاذا لم يتح للطالب في المدرسة ان يتعرف على النزعات المختلفة التي ترافق مصارعة الحل فان ثقافته الرياضية تفقد اثمن نواحيها .

العمل العكسي :

اذا نحن شئنا ان نفهم سلوك الانسان تجاه المسائل التي يقابلها فلا مندوحة لنا عن مقارنته بسلوك الحيوان فالحيوان ايضاً له مسائل وهو يحل مسائله . وعلم النفس التجريبي مشى خطوات واسعة في السنوات الاخيرة في دراسة المجهود الذي تبذله بعض الحيوانات في حل مسائلها . ولا نستطيع ان نستعرض

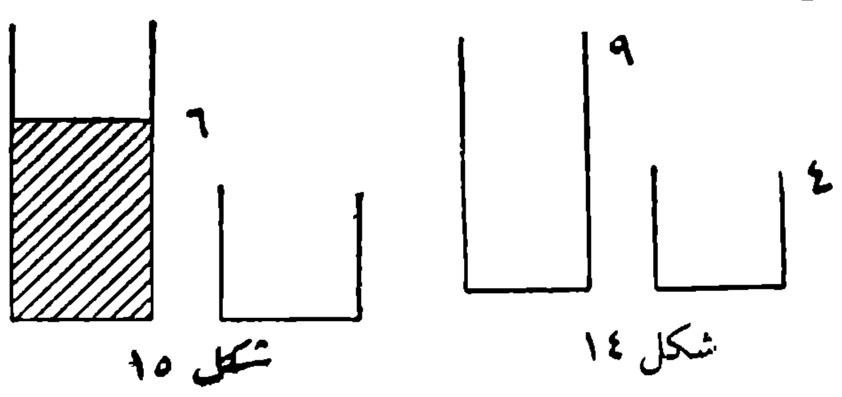
هنا هذه الدراسة ولكننا سنلخص واحدة من التجارب البسيطة المفيدة كأساس لبحثنا في التحليل او العمل العكسي . وقد اشرنا الى هذا في مادة : بابس الذي ندين له بوصف هام لطريقة التحليل .

١ – فلنحاول ان نجيب عن هذا السؤال الشائك : كيف نأخذ من النهر ستة ارطال من الماء اذا لم يكن لدينا سوى وعاءين احدهما يسع اربعة ارطال ، والآخر يسع تسعة ؟

فلنتخيل بوضوح الادوات التي لدينا : ما المعطيات ؟ وعاءان . فلنتصورهما وعاءين اسطوانيين متساويي القاعدة ارتقاؤهما ٩ و ٤ وحدات (شكل ١٤) . فلو كان الوعاءان مدرجين تدريجاً يمكننا من معرفة ارتفاع الماء في كل منهما لهان الأمر . ولكن ليس هنالك هذا التدريج ، فما زلنا اذن بمنأى عن الحل ، ولم نعرف بعد كيف نكيل ٦ ارطال .

ولكن هل يمكن ان نكيل شيئاً آخر ؟ (اذا لم تستطع ان تحل المسألة المعطاة فجرب ان تبدأ بحل مسألة اخرى ذات صلة بها . هل يمكنك أن تستنتج من المعطيات شيئاً يفيدك ؟) فلنحاول ان نعمل شيئا ولو لعبا وتسلية .

نستطيع أن نملأ الوعاء الاكبر ونملأ منه الوعاء الاصغر . فبذا نحصل على ٥ ارطال . فهل يمكن ان نحصل على ٦ ؟ لنأخذ الوعاءين الفارغين مرة اخرى فنحن نستطيع .



شكل ١٥ شكل ١٤

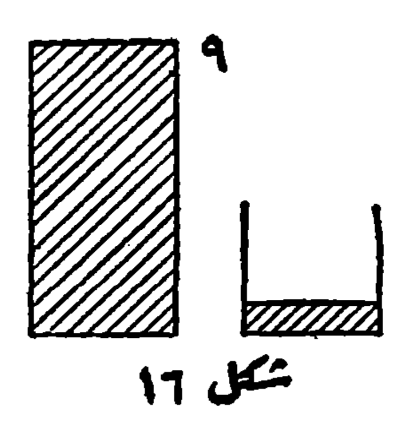
ها نحن نتلمس سبيلنا كأي واحد يُعطى هذه الاحجية ، فنتناول الوعاءين الفارغين ونجرب ، ونجرب ونملأ ونفرغ فاذا فشلنا في طريقة جربنا طريقة اخرى . فنحن نعمل قدما ، طرديا ، من حالة الابتداء الى حالة الانتهاء ، من المعطيات الى المجهول ، فقد ننجح بعد عدة محاولات وننجح صدفة .

٢ – ولكن ذوي المقدرة الفذة ، او اولئك الذين أتيح لهم في دروس الرياضيات ان يتعلموا ما هو اكثر من العمليات الروتينية لا يبذلون هذا الوقت كله في المحاولات وانما يدورون حول المسألة ، ويجربون المضي عكسيا من المجهول الى المعطيات .

ماذا يطلب منا ان نعمل ؟ (ما المجهول ؟) لنتصور بأجلى ما يمكن الحالة النهائية التي نريد الحصول عليها . لنتصور أن لدينا هنا الوعاء الاكبر وفيه ٦ ارطال والوعاء الاصغر وهو فارغ ، شكل ١٥ (لنبدأ بالمطلوب ونفترض ما نريد ان نجده كأننا وجدناه – كما يقول بابس) .

فما الخطوة التي يلزم ان تكون قد سبقت هذه الحالة النهائية المطلوبة المبينة بشكل ١٥ ؟

(من اي سابقة جاءت هذه النتيجة – يقول بابس) . قد نكون ملأنا الوعاء الكبير كله اي وضعنا فيه ٩ ارطال . ولكن ينبغي ان يكون بامكاننا عندئذ ان نسكب منه ثلاثة بالضبط . فلذلك ... ينبغي ان يكون لدينا رطل واحد في الوعاء الصغير .



شكل ١٦

(تلك هي الفكرة الطيبة (انظر شكل ١٦) والخطوة التي ذكرناها هنا ليست بالسهلة ، وقليل من الناس من يخطونها بدون تردد كبير . ولكننا اذ نلمح قيمتها تتبين لنا الخطوط العريضة للحل) .

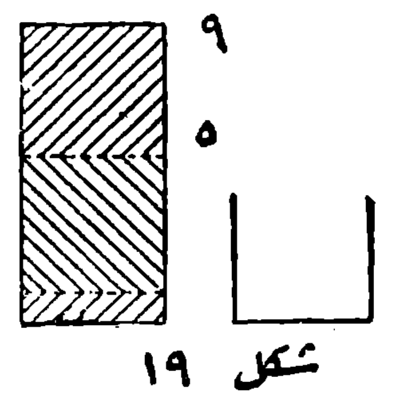
فكيف نصل الى الوضع الذي سبق وصفه واشرنا اليه بشكل ١٦ ؟ (لنرَ ما الخطوة التي

تسبق هذه السابقة) . فما دام ماء النهر غير محدود فالوضع المبين في شكل ١٦ هو مثل الوضع المبين في شكل ١٧ .

او الوضع المبين في شكل ١٨ .



ومن الواضح أنه اذا حصلنا على الوضع المبين في اي من الاشكال ١٦ ، ١٧ ، ١٨ ، فأي من الوضعين الباقيين يمكن الحصول عليه بسهولة . ولكن ليس من السهولة ان نلمح فكرة شكل ١٨ الا اذا سبق لنا أن لمحناها او قابلناها صدفة في محاولات سابقة . فعندما كنا نلعب بالوعاءين قد نكون رأينا مثل هذا الوضع فعندئذ يخطر على بالنا في اللحظة المناسبة ان الوضع في شكل ١٨ ينشأ من الوضع الذي يبينه شكل ١٩ . فلنملأ الوعاء الكبير ونصب منه اربعة ارطال في الوعاء الصغير ومنه الى البئر ، مرتين متتاليتين . اذن فقد وقفنا اخيراً على شيء سبق معرفته (هكذا يقول بابس) وباتباعنا طريقة التحليل ، العمل العكسي ، اكتشفنا كيف ينبغي ان تتوالى الخطوات . صحيح اننا اكتشفنا الخطوات بترتيب عكسي ولكن كل ما بقي علينا ان نعمله هو ان نعكس هذا الترتيب فنبدأ من آخر خطوة ادى اليها التحليل (كما يقول بابس) . فنبدأ بالعملية التي يصفها



شكل ١٩ ومنها نحصل على شكل ١٨ ثم ١٧ ثم ١٦ واخيراً ١٥ . وهكذا بتعقب خطوات العمل رجوعاً نحصل على المطلوب .

٣ – واليونان يعزون اكتشاف فكرة التحليل الى أفلاطون ، فإن لم يكن هذا صحيحاً وان لم يكن افلاطون هو الذي اكتشفها فلا بد ان يونانياً آخر قد وجد ان لها من القيمة ما يبرر ان تنسب الى عبقري كأفلاطون .

فلا شك أن في الطريقة شيئاً لا يمكن ان نعده سطحياً . فليس من السهل نفسياً ان ندور حول المسألة ، وان نبعد عن الهدف ، ان نجري في اتجاه مضاد ، ونتجنب الطريق المباشر الذي يؤدي الى غايتنا ، حتى اذا نحن اكتشفنا تتابع الخطوات بقي أن نعود القهقرى على نظام يعاكس ما خططناه . فالنفس قد تكره هذه القهقرى التي قد يعجز عن ادراكها الطالب النبيه ان هي لم توضح له بعناية خاصة . وقد لا نحتاج الى عبقرية من اجل حل مسألة محددة بالعمل العكسي ، فكل شخص قد يتوصل اليه بذكائه الفطري : يركز ذهنه على النهاية المطلوبة ويتصور الوضع النهائي الذي يريد ان يحصل عليه ، فمن أي وضع سابق قد يصل اليه ؟ هذا سؤال طبيعي . فاذا نحن سألناه فاننا نفكر عكسياً . حتى المسائل البدائية قد تضطرنا الى مثل هذا التفكير العكسي . انظر مادة : بابس ، ٤ .

والعمل العكسي عملية فطرية تحت متناول كل يد وليس لدينا شك في انها كانت تحت متناول الرياضيين وغير الرياضيين من قبل افلاطون . أما ما قد يكون قد رآه ذلك اليوناني عملاً يستحق ان ينسب الى عبقرية افلاطون فهو وصف هذه العملية وصفاً عاماً وتسجيلها كعملية عظيمة الفائدة في حل المسائل الرياضية وغير الرياضية .

٤ – فلنرجع الآن الى التجربة النفسانية ، وان يكن في تحويل النظر من افلاطون الى الكلاب والدجاج والشمبانزي طفرة غير مستحبة : سياج يحيط

بمستطيل من جوانب ثلاثة اما الجانب الرابع فمفتوح كما هو مبين في شكل ٢٠ . فاذا وضعنا كلباً امام احد الجوانب عند النقطة ك ووضعنا له طعاماً على الجانب الآخر عند النقطة ط ، فالمسألة بمنتهى السهولة بالنسبة الى الكلب فهو يخطر في باله ان يقفز عن السياج اول الامر ولكنه لا يلبث ان يدير ظهره فيعدو من جانب السياج ويجري الى الطعام في سبيل لا غضاضة فيه. ولكنه احياناً ، لا سيما اذا كانت النقطتان ك ، ط قريبتين جداً من بعضهما ، لا يهتدي الى الحل بهذه السهولة بل قد يقضي وقتاً يحاول فيه ان يقفز عن السياج او يقطعه قبل ان يلمح الفكرة النيرة (اذا جاز لنا ان نقول ذلك) فيدور من حوله .

ط
ه
ه
ك
شكل ٢٠

وقد يكون من الممتع ان نقارن سلوك حيوانات اخرى اذا وضعت موضع الكلب . فالمسألة بمنتهى السهولة بالنسبة الى الشمبانزي والى طفل في الرابعة من عمره (ولكن الطفل قد تغريه هدية لطيفة يلعب بها اكثر مما يغريه الطعام) . الا أن المسألة تبدو بالغة الصعوبة بالنسبة الى الدجاجة ، فهي تعدو هائجة صاخبة ذهاباً وجيئة في جانب السياج ، وان هي وصلت الى الطعام فقد تصل بعد جهد جاهد ووقت طويل ، وقد يكون وصولها بمحض الصدفة .

٥ ــ لا ينبغي لنا ان نبني نظرية واسعة على تجربة واحدة عرضناها بايجاز . ولكن لا يضيرنا ان نتأمل وجوه المقابلة الظاهرة باعتبارها اموراً ما يزال يعوزها التحقيق والتعميم .

فالدوران حول العقبة هو ما نعمله فعلاً عندما نحل مسألة من المسائل . وللتجربة السابقة قيمة رمزية فالدجاجة تصرفت كما يتصرف الذين يجابهون

مسائلهم بالجلبة والضوضاء والتشبث بباب واحد يقرعونه مرة بعد مرة ، ثم اذا هم نجحوا فرمية من غير رام ، ضربة حظ لا يعرفون معها كيف تم لهم النجاح. اما الكلب الذي قفز ونبح وهاجم السياج قبل ان يدور من حوله فانما صنع مثلما صنعنا اول الامر في مسألة الوعاءين ، فتخيل فكرة التدريج على الوعاءين اشبه بمهاجمة السياج ، ولكن هذا التخيل أفضى بنا الى ادراك ان ما نبتغيه انما هو اعمق من حفر نخطها على سطح الوعاء . وقد حاولنا في البدء ان نمضي قدماً بطريقة طردية قبل ان يخطر في بالنا ان ندور حول العقبة فنحل المسألة عكسياً . وكذلك الكلب اذ حاول ان يقفز من فوق السياج ، فهو بمراجعته لموقفه وتردده قليلاً ثم جريه ودورانه حول السياج يعطي ، حقاً او باطلاً ، مثلاً عن تفكير من مستوى عالٍ .

ولكن لا ينبغي لنا ان نلوم الدجاجة لخيبتها ، فمن الصعب عليها ان تدير ظهرها للهدف وتبعد عنه والا تسير الى غايتها في خط مستقيم . انها تجد في ذلك مثلما نجد نحن من صعوبات .

العمل اللاواعي

في ذات ليلة اردت ان احدث صديقاً لي عن احد الكتّاب . ولكني لم استطع ان اتذكر اسم الكاتب ، فازعجني ذلك لا سيما وقد تذكرت احدى قصصه وتذكرت حادثة معينة عنه هي التي كنت اريد ذكرها لصديقي . تذكرت كل شيء الا الاسم فقد حاولت وحاولت ان اتذكره دون جدوى . وفي صباح اليوم التالي ما كدت اتذكر حادث الأمس حتى حضرني اسم الكاتب دون عناء .

ولعل القارىء يذكر حادثاً مر به من هذا القبيل ، واذا كان من محبي حل المسائل فقد يتذكر حادثاً كهذا بخصوص الحل . فكثيراً ما يحدث ان تخفق في حل مسألة ولكن عندما تعود اليها بعد نوم مريح او بعد بضعة ايام تلوح لك الفكرة النيرة وتحل المسألة بسهولة . ولا شأن لنوع المسألة هنا فقد تكون كلمة

منسية او لفظة في مسألة كلمات متقاطعة او مطلع رسالة مزعجة او حلاً لمسألة رياضيـــة .

ومثل هذه الحوادث تبعث على الاعتقاد بنوع من العمل اللاواعي . والواقع ان المسألة بعد غياب طويل تتبدى لنا وقـــد اتضحت وقاربت الحل اكثر مما كانت عليـه عندما تخلينا عنها . فمن وضّحها ومن قربها من الحل ؟ انت الذي ظل عقلك اللاواعي يفكر فيها . فمن العسير ان نعطي جواباً عن ذلك غير هذا الجواب . الا أن السيكولوجيين وجدوا مبادىء جواب آخر قد يبدو في يوم من الايام خيراً من جوابنا هذا .

ومهما تكن مزايا نظرية العمـل اللاواعي فمن المؤكد ان ثمة حداً لا ينبغي بعده ان نجهد تفكيرنا الواعي . وهناك لحظات يبدو فيها ان الافضل ان نتخلى عن المسألة الى حين . وهناك حكمة قديمة تقول : « شاور وسادتك » . فاذا نحن تخلينا عن المسألة وانحنا لنفسنا بعض الراحة فقـد نعود في اليوم التالي فنحرز تقدماً كبيراً بجهد قليل . وثمة مثـل آخر يقول : « ما لا يتم اليوم يتم في الغد » ولكن يستحسن ألا نتخلى عن مسألة لنعود اليها غداً الا بعد ان نكون احرزنا فيها بعض التقدم ، كتقدير بسيط أو توضيح ناحية ما منها ، فما تسترجعـــه ذاكرتنا بشكل يصلح للحل هي المسائل التي نعقد كل عزمنا على حلها او المسائل التي نجهد فكرنا فيها . فالجهد والتحفز يبدو انهما ضروريان لتشغيـــل العقل اللاواعي . والا لكان الامر بمنتهى السهولة ولكانت الطريقة المثلى لحل المسائل الصعبة ان نأوي الى الفراش بانتظار وحي ينزل علينا بالفكرة النيرة .

ولقد تخيل الاقدمون ان حضور الفكرة النيرة فجأة الهام ، أو هبـــة من الآلهة . ولكن لست تستحق هذه الهبة ان أنت لم تجهد ذهنك او على الاقل ، تتوفر له رغبتك الحارة . *

---

* انظر البحث المفصل عن « التفكير اللاواعي » لجاك هدامارد في كتابه :
The Psychology of Invention in the Mathematical Field .

العناصر المساعدة

ان فهمنا للمسألة بعد حلها يكون أوفى واتم من فهمنا لها عند بدء التفكير فيها (راجع مادة : التقدم في العمل وانجازه ، ١) . ونحن اذ نتقدم في العمل نزيد عناصر جديدة الى العناصر التي بدأنا بهـــا . والعنصر الذي نستقدمه كي يمكننا من الحل نسميه العنصر المساعد .

١ – وهناك انواع عدة من العناصر المساعدة . ففي حل مسألة هندسية قد ندخل خطوطاً جديدة في الشكل فهذه خطوط مساعدة ، وفي حـــل مسألة جبرية قد نأتي بمجهول مساعد (انظر مادة : المسألة المساعدة ، ١) .

والنظرية المساعدة نظرية نبرهن عليها قصد التقدم في حل مسألتنا الاصلية .

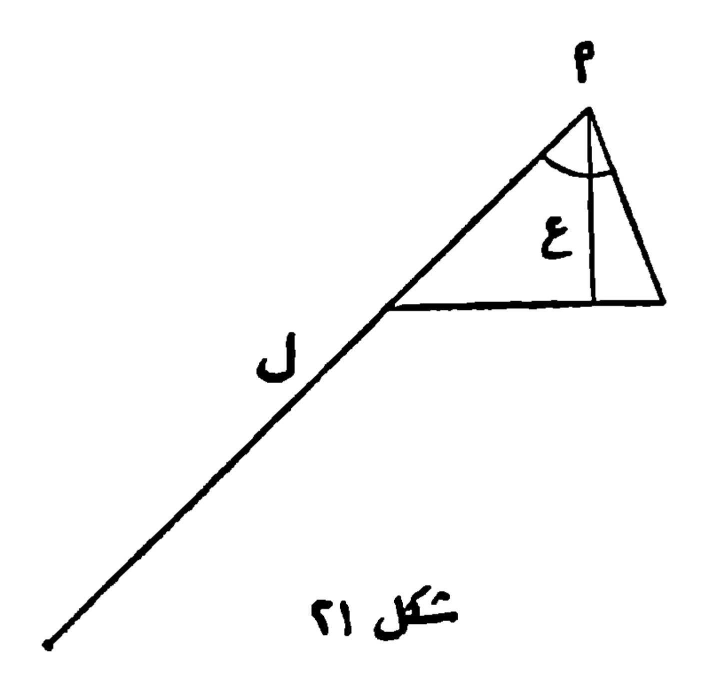
٢ – وهناك اسباب عدة تدعو الى استجـــلاب العناصر المساعدة . فنحن نغتبط عندما نتذكر مسألة ترتبط بمسألتنا وقد حللناها من قبل ، فنظن أن من المحتمل ان نستخدم هذه المسألة ولكننا لا ندري بعـــد كيف نستخدمها . فلتكن المسألة التي نريد حلها مسألة هندسية والمسألة المرتبطة بها التي حللناها من قبل واستعادتها ذاكرتنا الآن مسألة عن مثلثات . الا أننا لا نجـــد في الشكل الذي امامنا مثلثاً ، فلكي يمكن ان نستخدم هذه المسألة التي تذكرناها يجب أن ندخل في الشكل مثلثاً باضافة خطوط مساعدة اليه . وبوجه عام نقول اننا اذا تذكرنا مسألة نعرفها ترتبط بمسألتنا الحاضرة وقد سبق لنا حلها فلكي نتمكن من استخدامها نسأل : هل يلزم ادخال عنصر جديد مساعد يجعل استخدامهـــا ممكناً ؟ (والمثال في القسم ١٠ مثال نموذجي على ذلك) .

والعودة الى التعريفات تعطينا فرصة اخرى لادخال عناصر مساعدة . فمثلاً عندما نذكر تعريف الدائرة لا يكفي ان نذكر مركزها ونصف قطرها بـــل يجب ان نظهرها في الشكل فان لم نفعل فلا نجني فائدة محسوسة من التعريف ، وذكر التعريف بدون رسم مجرد كلام عابر .

لمحاولة استخدام النتائج التي سبق ان عرفناها والعودة الى التعريفات من خير الاسباب التي تدعو الى ادخال عناصر مساعدة ، ولكن ثمة اسباباً غيرهما ، فنحن ندخل عناصر جديدة مساعدة كي تجعل ادراكنا للمسألة اكمل واكثر ايحاء واقرب الى المألوف حتى من قبل ان ندرك بجلاء كيف نستخدم هذه العناصر المضافة . وقد نشعر مجرد شعور ان في رؤية المسألة ومعها هذه العناصر فكرة نيرة .

وقد تختلف اسباب ادخال العنصر المساعد ، ولكن لا بد من سبب ولا ينبغي ان ندخل أي عنصر اعتباطاً بلا سبب .

٣ – مثال : ارسم مثلثاً اذا اعطيت احدى زواياه ومحيطه وطول العمود النازل من رأس الزاوية المعطاة على القاعدة المقابلة لها .



شكل ٢١

لندخل الرموز المناسبة :

فلنجعل أ الزاوية المعلومة ، ع الارتفاع المعلوم النازل من أ ، ل المحيط المعلوم ، ولنرسم شكلاً يحوي أ ، ع . فهل استعملنا كل المعطيات ؟ كلا . لأن الشكل الذي رسمناه لم نجعل محيطه مساوياً للطول ل .

شكل ٢٢

فلندخل ل . ولكن كيف ؟ لدينا عدة طرق لذلك والشكلان ٢١ ، ٢٢ ،

يمثلان اثنتين من هذه الطرق وهما محاولتان لا تجديان واذا نحن اردنا ان نعرف السبب فقد ندرك أنه فقدان التماثل .

فالواقع ان المثلث يضم ثلاثة مجاهيل هي أ ، بَ ، جَ ، باعتبار أ ، كالمعتاد طول الضلع الذي يقابل زاوية أ . ونحن نعرف ان

أ + بَ + جَ =

فالضلعان بَ ، جَ ، يلعبان دوراً واحداً ، ويمكن استبـــدال احدهما بالآخر ، والمسألة فيها تماثل من حيث بَ ، جَ . ولكن دوريهما ليسا متفقين في اي من الشكلين ٢١ ، ٢٢ ، لأنا باختيار ل في هـــذا الوضع ميزنا بين دوريهما . فالشكلان ٢١ ، ٢٢ ، يختل فيهما التماثل الطبيعي للمسألة بالنسبة الى بَ ، جَ ، فيلزم ان نضع ل بحيث يكون في وضع واحد بالنسبة الى ب ، ج .

هذا الاعتبار قـد يوحي لنا بوضع ل كما في شكل ٢٣ بان نضيف الى الضلع أ على احد طرفيه القطعة ج ه مساوية بَ وعـلى الطرف الآخر القطعـة ب د مساوية جَ ، فيكون ل في شكل ٢٣ هو المستقيم ه د وطوله بَ + أ + جَ = ل .

شكل ٢٣

واذا كان لدينا بعض الخبرة في حل مسائل الرسم فلن يفوتنا ان نضيف الى الشكل عدا ه د المستقيمين المساعدين أ د ، أ ه وكل منهما قاعدة مثلث متساوي الساقين . وليس من المستهجن ان ندخـــل في الشكل عناصر ظاهرة البساطة مألوفة كمثلثين متساويي الساقين .

وان من حسن الحظ في هذه الحالة ان قد ادخلنا هذين العنصرين المساعدين

فاذا نظرنا الى الشكل الجديد فسنكتشف ان زاوية هـ أ د ذات صلة ظاهرة بزاوية أ المعطاة . اذ من المثلثين المتساويي الساقين المثلث أ جـ هـ ، والمثلث أ ب د نجد ان زاوية د أ هـ = $\frac{أ}{٢}$ + ٩٠° وبعد هذه الملاحظة يكون من الطبيعي أن نحاول رسم المثلث د أ هـ . وهكذا تدخل في الحل مسألة مساعدة اسهل بكثير من المسألة الاصلية .

٤ – وعلى المدرسين ومؤلفي الكتب المدرسية ان لا ينسوا أن الطالب الذكي والقارىء الذكي لا يكفيهما ان يريا خطوات الحل صحيحة دون ابراز الدافع لكل خطوة والهدف الذي من ورائها . وان ادخال اي عنصر مساعد خطوة ظاهرة فاذا برز في الشكل على حين غرة وبدون تهيئة خط مساعد ماكر حلت به المسألة فجأة فان اذكياء الطلاب والقراء يشعرون بخيبة الأمل ويجدون في الامر خدعة . والرياضيات تظل موضع اهتمامنا ما دامت تشغل تفكيرنا وتحفز قوى الابداع عندنا ، ولكن اذا بقي الدافع الى ابرز خطوات الحل والقصد الذي من ورائها بعيدين عن الفهم فلا يبقى ثمة ما يشغل التفكير او يحفز قوى الابداع . ولا غرو ان تقريب مثل هذه الخطوات للفهم باضافة ملاحظات مناسبة (كما تقدم في ٣) او باسئلة وتوجيهات مختارة بعناية (كما في الاقسام ١٠ ، ١٨ ، ١٩ ، ٢٠) يقتضي وقتاً طويلاً وجهداً كبيراً ، ولكن ذلك كله لا يضيع سدى .

الفكرة النيرة

و « الفكرة الجيدة » و « بارقة الأمل » كلمات تعبر عن تقدم فجائي في طريق الحل . راجع مادة : التقدم في العمل وانجازه ، ٦ . وتراءي الفكرة النيرة تجربة تمر على كل فرد ولكن من الصعب وصفها . فلذا قد يكون من الممتع ان نذكر تصويراً لها انحدر الينا بقلم ارسطو .

وقد يوافق اكثر الناس على أن رؤية الفكرة النيرة نوع من الفطنة ، بيد أن ارسطو يعرف الفطنة بانها « العثور تقديراً على الرابطة الرئيسية بسرعة خاطفة. فاذا انت رأيت مثلاً رجلاً يتكلم مع احد الاثرياء بطريقة معينة فقد تقدر في الحال أن الرجل يريد ان يستلف حالاً . واذا أنت لاحظت أن الجانب المنير من القمر يقع دائماً قبالة الشمس فقد تستنتج سبب ذلك في لحظة ، وهو أن القمر يستمد نوره من الشمس » .*

اما المثال الاول الذي يورده ارسطو فلا بأس به ولكنه تافه فليس ثمة فطنة كبيرة في تقدير اشياء من هذا النوع حول المال والاثرياء ، وليس ثمة فكرة نيرة . واما المثل الثاني فمقنع لا سيما اذا نحن تخيلنا الأمر في ظروفه الخاصة به :

فينبغي ان ندخل في حسابنا ان المرء في عصر ارسطو كان يرقب الشمس والنجوم لمعرفة الوقت لأنه لم يكن يملك ساعة في يده ، وكان يرقب اوجه القمر كلما اعتزم السفر ليلاً لأنه لم يكن هنالك انوار تضيء الطرق فهو من اجل ذلك كان اكثر التصاقاً باحوال السماء من ابن المدينة في وقتنا الحاضر كما ان ذكاءه الفطري لم يكن يغشاه ما تنقله صحفنا من صور غير ناضجة عن نظريات الفلك . وقد كان يرى البدر قرصاً منبسطاً كقرص الشمس ولكنه اقل نوراً بكثير . وكان يستغرب كثيراً لهذا التغيير الذي يصيب شكل القمر ووضعه ، ولا شك انه راقبه اجيالاً طويلة حول مطلع الشمس وحول مغيبها حتى ادرك « ان الجانب المنير من القمر يقع دائماً قبالة الشمس » وكان هذا الاكتشاف عظيماً فقد جعله يدرك أن القمر في اختلاف اوجهه ككرة تتلقى الضوء من جهة واحدة فنصفها مضيء ونصف معتم . وهو اذن لم يعد يرى الشمس والقمر قرصين

---

* النص هنا فيه تصرف ، وفي الانجليزية ترجمة أدق له في كتاب :

William Whewell , The Philosophy of the Inductive Sciences (1847), Vol. II, p. 131.

منبسطين بل كرتين احداهما تبعث النور والاخرى تستقبله واذن فقد فهم الرابطة الجوهرية فهو في لمحة يعدل معلوماته . وثمة اذن قفزة في تخيله ، فكرة لامعة ، لمحة من العبقرية .

القارىء الذكي

الذكي الذي يقرأ كتاباً رياضياً يرغب في امرين :
اولهما ان يرى ان الخطوات التي امامه صحيحة ،
والثاني ان يرى الغاية من وراء كل خطوة .

والمستمع الذكي الذي يأتي الى محاضرة رياضية يرغب في هذين الامرين ايضاً . فان هو لم يستطع ان يرى ان الخطوة التي امامه صحيحة او اشتبه في انها خاطئة فقد يقف محتجاً او يلقي سؤالاً . اما اذا هو لم يرَ الغاية التي من ورائها او لم يلمح سببا لها فهو على الغالب لا يستطيع ان يصوغ اعتراضا واضحا عليها ، وهو لذلك لا ينبس بسؤال او احتجاج وانما يجلس مذعوراً يستشعر الضيق ويغيب عنه مجرى الطريقة كله .

فالمدرس الذكي والمؤلف الذكي عليهما ان يتذكرا هذه الحقيقة . فمن الضروري ان نكتب الصحيح ونتكلم الصحيح ولكن هذا لا يكفي ، ورب طريقة نعرضها بشكل صحيح في كتاب او على السبورة ولكنها لا تفهم ولا تفيد لأن القصد من وراء خطواتها بقي سراً مغلقا يعسر على الفهم ومن ثم فالقارىء او السامع يبقى في حيرة يتساءل كيف أتيح لغيره ان يقع على هذه الطريقة وهو لا يستطيع أن يستخلص منها كيف يمكنه هو ان يبتكر طريقة مثلها بنفسه .

واسئلة ثبتنا وتوجيهاته قد تفيد المؤلف والمدرس اذ تحثهما على اظهار القصد والدافع في كل خطوة ويفيد بشكل خاص في هذا الصدد سؤالنا : هل استعملت كل المعطيات ؟ فبه يستطيع المؤلف والمدرس ان يشيرا الى الحاجة الى استعمال

احدى المعطيات التي تستعمل من قبل . ثم ان القارىء (او السامع) يستطيع أن يسأل السؤال نفسه ليدرك مرمى المؤلف (او المدرس) من استعمال عنصر ما من عناصر المسألة. وهو قد يتراءى له ان سأل نفسه هذا السؤال فقد كان يتاح له ان يكتشف هذه الخطوة بنفسه .

قواعد الاسلوب

اول قواعد الاسلوب ان يكون لديك ما تقوله . وثاني قواعد الاسلوب ان تكبح جماح نفسك عندما يتبادر لك امران تقولهما ، فقلهما واحداً بعد واحد ولا تقلهما معا في آن واحد .

قواعد الاكتشاف

اول قواعد الاكتشاف ان تفتح ذهنك وتنتظر حظك ، وثاني قواعد الاكتشاف ان تبقى متحضراً متربصا حتى تلمح الفكرة النيرة .

وقد يستحسن ان نتذكر ولو بمرارة ان بعض الاماني سراب ، فالقاعدة التي تؤدي الى حل كل المسائل الرياضية من غير ان ينالها خطأ أمنية اغلى عندنا من حجر الفلاسفة الذي وراءه جرى كيماويو العصور الوسطى . ولكن هذه القاعدة لا بد أن تكون سحراً ، ونحن نعرف ان ليس ثمة سحر . فايجاد قاعدة لا يصيبها الباطل تحل كل مسألة كانت حلما من احلام الفلسفة وستبقى أبداً في عالم الاحلام .

والهورستيكا ليس من اهدافها الحصول على قاعدة لا تخطىء . ولكنها مجرد محاولة لدراسة الاجراءات النموذجية التي تفيد في حل المسائل (من عمليات ذهنية ومحاولات وخطوات) وهي اجراءات يقوم بها كل عاقل يهتم بمسألته . واليها نشير بأسئلة وتوجيهات تبدو متبلورة في الثبت ولكنا نأمل ان يوجهها اذكياء الناس الى انفسهم واذكياء المدرسين الى طلابهم . واذا كان جمع اسئلة

وتوجيهات كهذه بنص عام وترتيب لطيف امراً أقل من حجر الفلاسفـة شأنا فانه امر ممكن على كل حال . والثبت الذي ندرسه مجموعة من هذا النوع .

قواعد التدريس

اول قواعد التدريس ان تعرف ما الذي يجب ان تدرّسه . وثاني قواعـد التدريس ان تعرف اكثر ، ولو قليلاً ، من الذي ستدرسه .

والأهم مقدم . ومؤلف هذا الكتاب ليس ممن يرون ان كل الحدود المفروضة على سلوك المدرسين لغو لا فائدة فيه ، والا لما جرؤ على وضع كتاب كامل حول سلوك الاساتذة والطلاب . ومهما يكن من امر فينبغي ألا ننسى ان مدرس الرياضيات يجب ان يعرف بعض الرياضيات وان المدرس الذي يريد ان ينقل الى طلابه المسلك الذهني المفيد تجاه المسائل ينبغي ان يكون هو نفسه قد سار في هذا المسلك .

اللغـــو

انظر مادة : الشرط .

لَيْبْنِتْز

جوتفرد ولهلم لَيْبْنِتْز (١٦٤٦ – ١٧١٦) رياضي وفيلسوف عظـيم كان ينوي أن يضع كتابا عن فن الاختراع ولكن فكرتـــه هذه لم تخرج الى النور سوى شذرات مبعثرة في كتبه تشير الى أنه كان يحمل آراء ممتعة عن الموضوع وكثيراً ما اشار الى اهميتـــه . من ذلك قوله : « لا شيء اهم من رؤية بواعث الاختراع التي هي اهم في نظري من الاختراع نفسه » .

لماذا البراهين ؟

هنالك قصة مأثورة عن نيوتن تقول انه عندما كان طالباً بدأ يدرس الهندسة ، كعادة الناس في عصره ، بقراءة اصول اقليدس . ولكنه كان يقرأ منطوق النظرية فيتبين صحتها في ذهنه ، ثم يغفل البرهان ، وكان يستغرب لماذا يجهد الناس انفسهم في البرهنة على الاشياء البينة . ولكنه بعد سنوات عدة غير رأيه ومدح اقليدس .

وقد تكون القصة صحيحة وقد لا تكون الا أن السؤال يستحق الاعتبار . فلماذا نعلم او نتعلم البراهين ؟ وما الافضل : اغفال البراهين قاطبة ام البرهنة على كل شيء ، ام اثبات اشياء والتسليم باشياء ؟ واذا اخترنا اثبات بعض الحقائق فقط فأيها نثبت ؟

١ – البرهان الكامل : هنالك ضرب من المنطقيين يرون ان ليس ثمة الا البرهان الكامل . فما يسمى برهاناً ينبغي ألا يترك فجوة او فراغاً او مجالاً للشك على الاطلاق والا فليس برهاناً .

ولكن هل نجد مثل هذا البرهان البالغ الدقة في حياتنا اليومية او في اجراءاتنا القضائية او في العلوم الفيزيائية ؟ يندر ذلك . فلذا يتعذر علينا أن نفهم كيف السبيل الى الحصول على فكرة عن هذا البرهان الكامل الدقيق . وليس ثمة كبير مبالغة اذا قلنا ان الناس جميعاً تعلموا البرهنة من شخص واحد وكتاب واحد ، من اقليدس واصوله . وعلى كل حال فان دراسة اصول الهندسة المستوية تعطينا اكبر فرصة للحصول على فكرة البرهان القاطع .

فلنأخذ مثالنا البرهنة على النظرية . في كل مثلث يكون مجموع الزوايا الثلاث زاويتين قائمتين * والشكل ٢٤ غير غريب علينا فليس بحاجة الى ايضاح . فهناك

* هذا جزء من النظرية ٣٢ في الجزء الاول من الاصول. والبرهان الذي نورده ليس لاقليدس ولكن اليونان عرفوه .

مستقيم يمر بالرأس أ موازياً للضلع ب جـ . وزاويتا المثلث ب ، جـ تساويان زاويتين من زوايا أ بالتبادل . فزوايا المثلث الثلاث تساوي الزوايا الثلاث التي رأسها أ وتكون فيما بينها زاوية مستقيمة اي زاويتين قائمتين ، وهكذا تثبت النظرية .

شكل ٢٤

فاذا فرغ الطالب من دراسته الرياضية في مدرسة ما من غير فهم تام لبضعة براهين كهذا فمن حقه أن يحمل على مدرسته واساتذته حملة شعواء .

فيجب ان نميز بين الاشياء من حيث اهميتها فقد تفوت على طالب فكرة هندسية ما فلا يخسر كثيراً لأنه لا يجد متسعاً لاستعمالها في المستقبل . ولكن اذا هو فاته التعرف على البراهين الهندسية فقد فاته افضل واسهل الفرص لمعرفة اقامة الدليل الحق وفاته ايضاً خير فرصة للتمرن على الاستنتاج القاطع . وبدونها يفقد المقياس الصحيح لوزن الدليل في شتى المناسبات التي نقابلها في عصرنا الحاضر .

وجملة القول اننا اذا شئنا ان نجعل من التربية العامة وسيلة لتعريف الطلاب على فكرة الدليل البديهي والتفكير المنطقي فعلينا أن نستبقي في التربية العامة مجالاً للبراهين الهندسية .

٣ – النظام المنطقي: ان الهندسة كما وضعها اقليدس ليست مجرد حشد للحقائق ولكنها نظام منطقي . فالبديهيات والتعريفات والنظريات لم تسرد اعتباطاً بلا ترتيب ولكنها ترد بترتيب رائع . فكل نظرية وضعت بحيث تعتمد على ما سبقها من بديهيات وتعريفات ونظريات ، حتى ليحق لنا ان نعتبر ان عمل اقليدس هو ترتيب هذه النظريات وان الميزة الكبرى لأصوله هي هذا النظام المنطقي الذي ينتظمها جميعاً .

وأصول اقليدس ليست نظاماً منطقياً فحسب بل هي اول واعظم مثل

للنظام المنطقي ، وقد حاول الناس وما زالوا يحاولون الوصول الى مثله في العلوم الاخرى . ولكن هل ينبغي للعلوم الاخرى ولا سيما البعيدة منها عن طبيعة الهندسة ، كعلم النفس والتشريح ، ان توضع على غرار منطق اقليدس الرصين ؟ هذا سؤال تختلف وجهات النظر فيه ، ولكن لا يحق لمن لم يعرف نظام اقليدس أن يدلي في الموضوع برأي .

والبراهين هي الاسمنت الذي يمسك بنياننا الهندسي بعضه الى بعض ، فبالبرهان ترتبط كل نظرية بما سبقها من بديهيات وتعريفات ونظريات ، وبدون البرهان يتعذر ان يفهم اثمن ما في هذا البنيان .

فصفوة القول اننا اذا شئنا ان نجعل من التربية العامة وسيلة لتعريف الطلاب على فكرة النظام المنطقي فينبغي ان نستبقي في التربية العامة مجالاً للبراهين الهندسية .

٣ — وسائل الاستذكار : وليس من رأينا أن الحجة البديهية والبرهان القاطع والنظام المنطقي قد تعد أموراً ثانوية بالنسبة الى اي من الناس . فان تكن هنالك حالات لا تعد فيها دراسة هذا كله امراً ضرورياً محتوماً نظراً لضيق الوقت او لأسباب أخرى ففي هذه الحالات يبقى من المستحب ان تدرس بعض البراهين .

والبراهين تقدم الحجة ، فهي بذلك تمسك النظام الهندسي بعضه الى بعض وهي تساعد على استذكار العناصر المختلفة التي تمسكها . ولنأخذ المثال السابق الذي يتعلق بشكل ٢٤ . فالشكل يثبت ان مجموع زوايا المثلث ١٨٠° وهو يربط هذه الحقيقة بحقيقة أخرى هي أن الزوايا المتبادلة متساوية . والحقائق المترابطة امتع للعين واخف على الذاكرة من الحقائق المفرقة . وبالشكل ترسخ في الذهن النظريتان الهندسيتان المترابطتان حتى تصيرا جزءاً من ذخيرته غير غريب عنه .

فلنأت الآن الى حالة لا يكون فيها ضرورياً الحصول على كافة البنيان

الهندسي ومن اجل ذلك يكتفى منه بحقائق محدودة . ففي هذه الحالة ينبغي أن تعرض هذه الحقائق مترابطة بصورة ما ، لأن الحقائق المفرقـــة تأتي ثقيلة صعبة وتهرب خفيفة سهلة. فأي رباط لها يضمها معاً بصورة سهلة طبيعية وعقد لا ينقطع انما هو رباط نرحب به مهما يكن نوعه . فليكن رباطها على شاكلة ما يسمى بوسائل الاستذكار . اذ ليس ضرورياً ان يقوم ربطهـا على المنطق حتى يكون عوناً للذاكرة . ولكن حتى في وسائل الاستذكار تكون البراهين بالغة الفائدة لا سيما السهل منها . فاذا كان على الطالب أن يتذكر حقيقتين هما مجموع زوايا المثلث وخاصة الزوايا المتبادلة ، فهل هنالك وسيـــلة لاستذكار هاتين الحقيقتين اسهل وابسط واقوى من شكل ٢٤ ؟

وخلاصة القول أنه حتى حيث لا نعلق اهميـة خاصة على منطقية الافكار تفيدنا البراهين كوسيلة للاستذكار .

٤ — نظام كتب الطهو . دافعنا عن فوائد البرهان ولكننا لا نعني أن كل البراهين يجب ان تعطى على اطلاقها .

فان هنالك حالات يستحيـــل معها ذلك . ومن أهمها تدريس حساب التفاضل والتكامل للمهندسين . فاذا أردنا تدريس هذا الموضوع حسب المقاييس المنطقية الحديثة نحتاج الى براهين على درجة من الصعوبـــة والدقة ، مما يسمى براهـين ابسيلون (Epsilon proofs) . ولكن المهندسين يهمهم الموضوع من ناحيته التطبيقية فحسب وهم لا يملكون الوقت ولا الاساس الرياضي ولا الاهتمام الكافي لمصارعة البراهين الصعبة الرزينة او تقدير ما فيها من دقة ورصانـــة . لذلك نلمس عند البعض ميلاً لاغفال كل البراهين في حساب التفاضل والتكامل . وهذا يهوي بالبحث الى مرتبة كتب الطهو حيث تسرد بالتفصيل المواد اللازمة والاجراءات من غير سبب او دليل . وفي الطهو يقوم الدليل على صحة الطبخة عند أكلها فكتاب الطهو يؤدي اذن الغاية المرجوة منه ، ولا نحتاج معه الى نظام

منطقي أو وسيلة للاستذكار لأن الوصفات تكتب او تطبع في الورق ولا يلزم استيعابها في الذاكرة .

الا أن مؤلف الكتاب المدرسي في حساب التفاضل والتكامل او المدرس في الكلية لا يؤديان الغاية المرجوة منهما اذا هما نسجا على منوال كتب الطهو . فتدريس الاجراءات بدون براهين وتلقينها من غير دوافعها لا يؤديان الى فهم . والقواعد اذا جردت عن اسبابها وروابطها تنسى بسرعة . والرياضيات لا يمكن أن تختبر كما يختبر الطعام المطبوخ . فاذا نحن لم نثر التفكير في حساب التفاضل والتكامل فاننا نجعله اشبه بكشف في قواعد ومعلومات لا يمكن أن تهضم .

٥ – شبه البرهان : والطريقة المثلى لمعالجة الامر بين مستوى البرهان البالغ الصعوبة ومستوى كتاب الطهو ان نكتفي باستعمال براهين غير كاملة استعمالاً معقولاً .

والمنطقي الدقيق يجد أن البرهان غير الكامل ليس برهاناً اطلاقاً . ولا شك أن شبه البراهين ينبغي تمييزه من البرهان الرصين فالخلط بينهما سيء والاستعاضة باي منهما عن الآخر اسوأ . ومن الامور المسيئة ان يعرض المؤلف برهاناً ناقصاً بشكل غامض يتذبذب بين الخجل وبين الخداع . بيد أن البرهان غير الكامل – او ما نسميه شبه البرهان – قد يكون ذا فائدة اذا هو استعمل في الموضع المناسب الذي يمليه الذوق وحسن الاختيار . وليست الغاية منه الاستعاضة به عن البرهان الكامل ، ولكن الغاية أن نضفي على الموضوع شيئاً من اللذة وشيئاً من التماسك .

مثال ١ : المعادلة الجبرية ذات الدرجة « ن » لها « ن » جذور لا اكثر ولا اقل هذه النظرية التي اعتبرها جاوس نظرية الجبر الاساسية كثيراً ما نضطر الى ذكرها أمام طلاب ليس بمقدورهم ان يفهموا برهانها . الا أنهم يعرفون أن المعادلة ذات الدرجة الاولى لها جذر واحد والمعادلة ذات الدرجة الثانية لها

جذران ثم ان النظرية رغم صعوبة برهانها لها جزء يمكن تبيانه بسهولة ، ذلك أن ليس هناك معادلة من الدرجة « ن » لها اكثر من « ن » من الجذور المختلفة . فهل هذه الحقائق تكوّن برهاناً كاملاً للنظرية الاساسية ؟ كلا بالتأكيد . ولكنها تكفي على كل حال لأن تثير في النفس شيئاً من الاهتمام بالنظرية والتقدير لها وتجعلها تبدو معقولة ، وأهم من هذا كله أن هذه الحقائق تعمل على تركيز النظرية في الاذهان .

مثال ٢ : في الزوايا المجسمة الثلاثية الوجوه يكون مجموع اي زاويتين بين الحافات اكبر من الزاوية الثالثة . واضح أن هذه النظرية تؤدي الى القول بان المثلث الكروي يكون مجموع اي ضلعين فيه اكبر من الضلع الثالث فاذا بدا لنا ذلك فمن الطبيعي أن تتبادر الى الذهن المقابلة بين المثلث الكروي والمثلث المستوي . فهل هذا يشكل برهاناً ؟ كلا بالتأكيد . ولكنه يساعدنا على فهم النظرية وربطها في الذهن .

والمثال الاول ذو قيمة تاريخية فقبل ٢٥٠ سنة كان الرياضيون يعرفون « النظرية الاساسية » بدون برهان كامل ، بل هم لم يبنوها على أساس اقوى مما ذكرنا . والمثال الثاني يشير الى المقابلة او القياس كمصدر من مصادر القناعة التقديرية . ففي الرياضيات كما في العلوم الطبيعية والفيزيائية كثيراً ما يبدأ الاكتشاف بالملاحظة والمقابلة والاستنتاج . وهذه هي الوسائل التي تستعمل في صياغة الحجة الهورستيكية المعقولة وهي وسائل تحظى بموافقة الفيزيائي والمهندس بشكل خاص . (انظر مادة الاستقراء والاستقراء الرياضي ١ ، ٢ ، ٣) .

وقيمة البرهان غير الكامل او شبه البرهان تتبدى الى حد ما من دراستنا لخطة الحل . وذو الخبرة في حل المسائل يعرف ان اول فكرة تتبادر الى الذهن من البرهان تكون على الغالب غير كاملة ولكن فيها يكمن المبدأ الرئيسي ، الرابطة الرئيسية ، نواة البرهان تكون على الغالب غير كاملة ولكن

فيها يكمن المبدأ الرئيسي ، الرابطة الرئيسية ، نواة البرهان الرصين . امــــا التفاصيل فتتوالى فيما بعد ، وكثيراً ما تكون عسرة صعبة المثال . ومن المؤلفين نفر يتمتعون بموهبة تمكنهم من وضع نواة البرهان اي الفكرة الرئيسية فيــــه بأبسط شكل ثم هم بعد ذلك يكتفون باشارة عابرة الى طبيعة التفاصيل ومثل هذا الذين يعملون شبه برهان ولكنه قد يكون اكبر فائدة من برهان مثقل بالتفاصيل .

فصفوة القول ان البرهان غير الكامل يمكن ان يجعل وسيلة للاستذكار (لا بديلاً عن البرهان الكامل) عندما يكون المطلوب تماسك المادة في الذاكرة بغض النظر عن بنيانها المنطقي الدقيق .

والدفاع عن البرهان الناقص قضية محفوفة بالخطر . ولكن يمكن الحد من سوء استعماله اذا وضعت له بضع قواعد كأن نتطلب ان يشار في الموضع المناسب والوقت المناسب الى ان البرهان غير كامل وان نشترط على المؤلف او المدرس اذا شاء ان يعطي برهاناً غير كامل ان يكون على علم اكيد بالبرهان الكامل . ثم يجدر الا ننسى ان عرض البرهان الناقص بحكمة ودراية وذوق سليم ليس بالامر السهل .

ما المجهول ؟

ما المطلوب ؟ ما الذي تريده ؟ ما الذي يلزم ان نحصل عليه ؟

ما المعطيات ؟ ما الذي نعلمه ؟ ماذا عندنا ؟ ماذا نعرف ؟

ما الشرط ؟ ما الرابطة بين المجهول والمعطيات ؟

قد يستعمل المدرس امثال هذه الاسئلة ليختبر فهم الطلاب للمسألة . وينبغي ان يكون الطلاب قادرين على اعطاء جواب واضح . ثم ان الاسئلة تركز تفكير الطلاب في الاجزاء الرئيسية : المجهول والمعطيات والشرط في «مسألة الايجاد » . ولما كان من الضروري اعادة النظر في هذه الاجزاء مرة بعد مرة فقد يضطر المدرس الى تكرار الاسئلة في مختلف مراحل الحل . (انظر الاقسام ٨ ، ١٠ ،

١٨ ، ٢٠ ، والمواد : وضع المعادلات ، ٣ ، ٤ ، المسائل العملية ، ١ ، الاحاجي ، وسواها) .

وهذه الاسئلة ذات اهمية كبيرة عند الذي يحل المسائل ، فيها يحقق فهمه للمسألة ويركز انتباهه على الجزء الذي يريده من اجزائها . والحل يقتضي ربط المجهول بالمعطيات فلا بد اذن من تفحص المسألة مرة بعد مرة بالسؤال : ما المجهول ؟ ما المعطيات ؟

وقد يكون للمسألة عدة مجاهيل او يكون للشرط عدة اجزاء ، وقد ينبغي النظر في هذه واحدة واحدة او قد ينبغي دراسة احدى المعطيات على انفراد . وهذا يضطرنا الى تعديل الاسئلة باشكال شتى كقولنا : ما المجاهيل ؟ ما اول المعطيات ؟ ما ثاني المعطيات ؟ ما أجزاء الشرط ؟ ما الركن الاول في الشرط ؟

وفي مسألة الاثبات جزءان رئيسيان هما المفروض والمطلوب والسؤالان اللذان يلائمانهما هما : ما المفروض ؟ ما المطلوب ؟ ولكن نحتاج الى تعديل هذين السؤالين عند مناقشة المسألة مع الطلاب كأن تقول ما الذي فرضناه ؟ ما الاركان المختلفة لفرضك ؟ (انظر المثال في القسم ١٩) .

المسألة الروتينية :

يمكن ان نعتبر حل المعادلة $س^٢ - ٣ س + ٢ = ٠$ مسألة روتينية اذا كان الطالب قد تعلم القانون العام للمعادلة التربيعية فلم يبق عليه الا التعويض في هذا القانون ، تعويض العددين − ٣ ، ٢ في القانون الحرفي. واذا هو لم يدرس القانون العام وانما حل المسائل بمعادلات عددية فهذه المسألة تصير ايضاً روتينية. فالمسألة تكون عادة روتينية اذا امكن حلها بتعويض معطيات جديدة في مسألة سبق حلها او باتباع خطى مسألة سابقة معروفة بدون اثر لأصالة او ابتكار. وعندما

يضع المدرس مسألة روتينية انما يضع نصب عينيه جواباً مباشراً قاطعاً للسؤال: هل تعرف مسألة ذات صلة بهذه ؟ وفي حل المسألة الروتينية لا يلزم الطالب سوى الانتباه والصبر في تتبع خطوات معروفة مرسومة وهو لا يجد مجالاً لاظهار أصالته او فطنته أو مقدرته على الابتكار . الا ان المسائل الروتينية ضرورية في تعليم الرياضيات . وضروري ايضاً ان نكثر منها . ولكن الاكتفاء بها عن كل ما عداها خطأ لا يغتفر فتعليم الطرق الميكانيكية دون سواها يحط قيمة الرياضيات دون كتب الطهو مرتبة . ذلك ان كتاب الطهو يبقي شيئاً لخيال الطاهي وحسن تصرفه اما الروتين الرياضي فلا يدع للطالب شيئاً من هذا القبيل .

مسائل الايجاد ومسائل الاثبات :

سنعقد الآن مقارنة بين هذين النوعين من المسائل :

١ - فغاية مسألة الايجاد هي ايجاد شيء ما هو المجهول في المسألة ، وهذا المجهول هو الذي نبحث عنه ، هو الشيء الذي نريده .

وقد تكون مسألة الايجاد نظرية أو عملية ، مجردة أو مادية ، جدية او حجية للتسلية ، وقد تحوي أي نوع من أنواع المجاهيل ، وقد تقتضي ان نجد اي شيء يمكن ان يخطر على البال ، ان نحصل عليه ، او نحسبه ، او نوجده أو نعمله او نرسمه . ففي قصص الجريمة يكون المجهول هو القاتل ، وفي لعبة الشطرنج يكون المجهول تحريك حجر معين . وفي بعض الالغاز يكون المجهول كلمة ، وفي مسائل الجبر الابتدائية يكون المجهول عدداً وفي مسائل الرسم الهندسي يكون المجهول شكلاً هندسياً .

٢ - وغاية مسألة الاثبات هي اقامة حجة قاطعة تثبت صحة حقيقة مذكورة بمنطوق واضح او تثبت بطلانها . فالقاضي همه ان يعرف اذا كان

الادعاء صحيحاً أو كاذباً وهمه ايضاً ان يعطي ادلة قوية تثبت صحة ما يراه . فالقاضي عنده اذن مسألة اثبات . ومن مسائل الاثبات ايضاً ان تبرهن على نظرية فيثاغورس . وفي بعض الاحيان قد يفضّل ان نذكر في نص المسألة ان المطلوب البرهنة على صحة الشيء او بطلانه ، ولكن في مثل نظرية فيثاغورس نعرف ان امكانية اثبات بطلانها امكانية ضئيلة .

٣ – والاجزاء الرئيسية في « مسألة الايجاد » هي المجهول والمعطيات والشرط .

فاذا كان المطلوب رسم مثلث اضلاعه أ ، ب ، ج ، فالمجهول هو المثلث والمعطيات هي الاضلاع أ ، ب ، ج ، والمثلث يجب ان يحقق الشرط وهو ان تكون اطوال اضلاعه أ ، ب ، ج . اما اذا كان المطلوب ان نرسم مثلثاً ارتفاعاته أ ، ب ، ج . فالمجهول شيء من نوع المجهول السابق والمعطيات هي نفس المعطيات السابقة ولكن الشرط الذي يربط المجهول بالمعطيات شرط جديد .

٤ – واذا كانت « مسألة الاثبات » مسألة رياضية من النوع المألوف فالجزآن الرئيسيان فيها هما المفروض والمطلوب .

« اذا كانت الاضلاع الاربعة في الشكل الرباعي متساوية فان قطريه يتعامدان » . جواب الشرط هنا هو المطلوب ، وما قبله هو المفروض .

(ولا يمكن فصل المفروض عن المطلوب في كل المسائل الرياضية بهذا الشكل البسيط فمن الصعب مثلاً الفصل بينهما في مثل المسألة : هنالك عدد لا نهاية له من الاعداد الاولية) .

٥ – واذا انت شئت أن تحل « مسألة ايجاد » فيجب ان تعرف معرفة دقيقة جداً اجزاءها الرئيسية ، المجهول والمعطيات والشرط . وفي الثبت عدة اسئلة وتوجيهات تتعلق بهذه الاجزاء .

ما المجهول ؟ ما المعطيات ؟ ما الشرط ؟

اعزل اجزاء الشرط بعضها عن بعض .

اوجد الرابطة بين المعطيات والمجهول .

انظر الى المجهول ، وحاول أن تجد مسألة تعرفها فيها هذا المجهول او مجهول يشبهه .

خذ جزءاً من الشرط واهمل الباقي ؛ الى أي حد يتعين بذلك المجهول ؟ كيف يتغير ؟ هل يمكنك ان تستنتج من المعطيات شيئاً يفيدك ؟ هل يمكنك ان تجد معطيات اخرى تناسب لايجاد المجهول ؟ هل يمكنك تغيير المجهول او المعطيات او كليهما اذا لزم الامر حتى تحصل على مجهول جديد ومعطيات جديدة اقرب الى بعض ؟

هل استعملت كل المعطيات ؟ هل استعملت كل الشرط ؟

٦ – واذا شئت أن تحل مسألة اثبات فيجب أن تعرف ، وتعرف بصورة واضحة ، جزأيها الرئيسين وهما المفروض والمطلوب . وهناك اسئلة وتوجيهات مفيدة بشأن هذين الجزأين وهي تناظر الاسئلة والتوجيهات التي تناسب « مسائل الايجاد » .

ما المفروض ؟ ما المطلوب ؟ افصل اجزاء المفروض بعضها عن بعض . أوجد الرابطة بين المفروض والمطلوب . انظر الى المطلوب وحاول ان تجد نظرية تعرفها فيها هذا المطلوب او مطلوب يشبهه . خذ جزءاً من المفروض واهمل الباقي ؛ هل يبقى المطلوب صحيحاً ؟ هل يمكنك أن تستخلص شيئاً يفيدك من المفروض ؟ هل يمكنك أن تجد مفروضاً آخر تستنتج منه المطلوب بسهولة ؟ هل يمكنك تغيير المفروض او المطلوب او كليهما اذا لزم الامر حتى ينتج لك مفروض ومطلوب جديدان أقرب الى بعض ؟ هل استعملت المفروض كله ؟

٧ – « ومسائل الايجاد » هي الأهم في الرياضيات الابتدائية . « ومسائل الاثبات » هي الأهم في الرياضيات العالية . وفي هذا الكتاب جنح المؤلف الى الحديث عن « مسائل الايجـــاد » اكثر ولكنه يرجو ان يعدل بينهما في بحث اوفى للموضوع .

المسائل العملية

تختلف المسائل العملية من عدة وجوه عن المسائل الرياضية المحضة الا أن الدوافع الرئيسية واجراءات الحل في جوهرها واحدة . والمسائل العملية لدى المهندسين تنطوي على مسائل رياضيـــة . وسنوجز هنــا الفروق والمقابلات والروابط بين هذين النوعين من المسائل .

١ – فمن المسائل العملية البارزة انشاء سد على نهر . ولسنا بحاجة الى معرفة اختصاصية لفهم هذه المسألة فمن قبل التاريخ ، من قبل عصر النظريات العلمية الحديث ، كان الناس يقيمون سدوداً من انواع شتى في وادي النيـــل ونواحي أخرى من العالم حيث يعتمـد الحصول على الري فلنتخيـــل مسألة بناء سد عصري هام .

ما المجهول ؟ المسألة التي من هذا النوع تحتوي على عدة مجاهيل كتحديـــد موضع السد وشكله الهندسي والمادة او المواد التي تستعمل في بنائه وغير ذلك .

ما الشرط ؟ لا يمكننا الاجابة عن هذا السؤال في جملة قصيرة لأن هنـالك شروطاً عدة . ففي مشروع ضخم كهذا ينبغي تحقيق عدة حاجات اقتصاديـة هامـة ، على ألاّ تضارّ حاجات أخرى الا قليـلاً فالسد ينبغي أن يمدنا بالقوة الكهربائية وماء الري وان يسد حاجة بعض الجماعات ويمنع الفيضان ، ولكنه من ناحية اخرى ينبغي ألا يعوق الملاحة الى حد ملموس والا يهدد حيـــاة الاسماك ذات القيمة الاقتصادية الهامة وألا يشوه المناظر الجميـــلة ، وهكذا . ومن

الشروط طبعاً أن يكلف البناء اقل ما يمكن من مال وان يتم بأسرع ما يمكن من وقت .

ما المعطيات ؟ اننا نحتاج الى قدر ضخم من المعطيات . فمعطيات طوبجرافية تتعلق بالارض المجاورة للنهر وبفروعه ، ومعطيات جيولوجية تتعلق بصلابة الاساس واحتمالات تسرب الماء ومواد البنــاء التي يمكن توفرها ، ومعطيات متورولوجية تتعلق بكمية الترسيب السنوي وارتفاع الفيضانات ، ومعطيات اقتصادية تتعلق بقيمة الارض التي سيغمرها الماء وتكاليف المواد واليد العاملة ، الى آخر ما هنالك .

فمثالنا هذا يدل على أن المجاهيل والمعطيات والشروط اكثر تعقيداً واقل تحديداً ووضوحاً مما نجد في المسألة الرياضية .

٢ — ونحن لكي نحل مسألة ما نحتاج الى معرفة سابقة مكتسبة . ومهندس العصر الحاضر يجد تحت متناول يده كمية ضخمة من المعرفة الاختصاصية العالية ونظرية علمية عن قوة احتمال المواد بالاضافة الى خبرته وخبرة المهندسين الآخرين مختزنة في الكتب الفنية . ونحن ليس بمقدورنا ان نتناول هذا كله هنا ولكن نستطيع ان نتخيل ما كان يدور بخلد المصري القديم عندما كان يريد ان يبني سداً من السدود .

فهو قد رأى لا شك سدوداً اخرى عديــدة اصغر من سده او اكبر ، حواجز ترابية او ابنية منشأة تقف في وجه الماء . وهو قد رأى لا شك الفيضان وهو يهاجم السدود بما يحمل من شتى المواد ، ولعله قــد ساهم في اصلاح الخلل الذي تركه الفيضان من تصدع وتعرية ، ولعله قد رأى ايضاً سدوداً تنهار تحت وطأة الفيضان ولا شك أنه سمع قصصاً تروى عن سدود صمدت اجيالاً عديدة واخرى جاء انهيارها المفاجيء بكارثة مخيفة . كل هذا قد طبع في ذهنه فكرة عن مقدار ضغط الماء على جانب السد ومدى تأثر مواد السد بذلك .

ولكن البناء المصري لم يكن لديه معلومات دقيقة قياسية علمية عن ضغط السائلات وقوة احتمال الاجسام الصلبة وهذه معلومات تكون القسم الجوهري من المعدات الذهنية للمهندس الحديث .

ولكن المهندس الحديث ايضاً يستعمل معلومات كثيرة لم تصل الى المستوى العلمي الدقيق فما يعرفه عن التعرية الناشئة عن جريان الماء وعن حمل الطمي ولدونة بعض المواد وصفات اخرى فيها لم تدرس دراسة دقيقة ، كل هذا معلومات ذات طابع تقديري .

فمثالنا يدل على أن المعلومات اللازمة والمبادىء التي يحتاج اليها هنا اكثر تعقيداً وتشعباً واقل تحديداً ووضوحاً في المسائل العلمية مما نجد في المسائل الرياضية .

٣ - فالمجاهيل والمعطيات والشروط والمبادىء والمعارف الاساسية الضرورية ، وكل شيء هنا اكثر تعقيداً وتشعباً واقل تحديداً ووضوحاً منه في المسائل الرياضية المحضة . وهذا فرق هام، بل لعله الفرق الاساسي وتحته تنطوي فروق اخرى، الا ان الدوافع الرئيسية واجراءات الحل هي في جوهرها واحدة في كلا النوعين من المسائل .

والرأي السائد أن المسائل العملية تحتاج من الخبرة الى اكثر مما تحتاج اليه المسائل الرياضية وقد يكون هذا صحيحاً . ولكن الارجح ان الفرق كامنٌ في طبيعة المعرفة اللازمة لا في تصرفنا تجاه المسألة . فعند حل مسألة من هذا النوع او ذاك نعتمد على تجربتنا بالمسائل المماثلة وكثيراً ما نتساءل : هل رأيت هذه المسألة من قبل بشكل قريب ؟ هل تعرف مسألة ذات صلة بها ؟

ولكننا في حل المسألة الرياضية نبدأ بافكار واضحة تامة الوضوح مرتبة الى حد ما في الذهن ترتيباً جيداً . اما في حل المسألة العملية فكثيراً ما نضطر للبدء بافكار باهتة نوعاً ما ثم قد يصير جلاء هذه الافكار جزءاً هاماً من

المسألة . فالعلم الطبي اليوم اقدر على وقف الامراض السارية مما كان في ايام باستور عندما كان سريان الإمراض نفسه فكرة غير واضحة . هل اخذت بعين الاعتبار كل المبادىء الاساسية التي تنطوي عليها المسألة ؟ هذا سؤال جيد في كل مسألة ولكن الاجابة عنه تختلف كثيراً حسب طبيعة المبادىء التي تنطوي عليها المسألة .

وفي المسألة الرياضية التي يكون منطوقها سليماً تكون كل المعطيات وكل اجزاء الشرط جوهرية ويلزم ان تؤخذ بعين الاعتبار . اما في المسائل العملية فعندنا قدر ضخم من المعطيات والشروط نأخذ منها بعين الاعتبار اكثر ما يمكن ولكننا نضطر الى التغاضي عن بعض منها . خذ مثلاً قضية الرجل الذي يبني السد الكبير . فهو يعنى بحاجات الناس وبالامور الاقتصادية الهامة ولكنه يضطر الى التغاضي عن بعض الطلبات والظلامات الجزئية . ومعطياته هي في الواقع لا حصر لها . فهو قد يريد ان يعرف المزيد عن الطبيعة الجيولوجية للأرض التي يرسي عليها الاساس . ولكنه مضطر في النهاية الى الوقوف من جمع هذه المعلومات عند حد وتقبل افتراضات ظنية لا صلة له فيها .

هل استعملت كل المعطيات ؟ هل استعملت الشرط كله ؟ هذان سؤالان لا نستطيع التغاضي عنهما في حل المسألة الرياضية البحتة . اما في المسائل العملية فينبغي تعديلهما : هل استعملت كل المعطيات التي قد تؤثر تأثيراً ملموساً في حل المسألة ؟ هل استعملت كل الشروط التي قد يكون لها شأن ملموس في حل المسألة ؟ اننا نستعمل الذخيرة التي لدينا من المعلومات الهامة ، ونجمع معلومات اخرى اذا لزم الامر ثم نحن قد نوقف جمع هذه المعلومات ، فلا بد من وضع حد ولا بد من تجاهل اشياء . « فمن يشأ ان يركب البحر من غير أن يتعرض لأخطاره فخير له ألاّ يركب » . وكثيراً ما يكون ثمة فيض من المعطيات لا تؤثر تأثيراً ملموساً في الشكل النهائي للحل .

٤ – والذين كانوا يصممون السدود المصرية القديمة كانوا يعتمدون على

التفسير الفطري لتجاربهم ولا شيء سواه . اما المهندس الحديث فلا يستطيع ان يعتمد على مداركه الفطرية وحدها لا سيما اذا كان مشروعه جديداً جريئاً . ان عليه ان يحسب قوة احتمال السد المطلوب ويقدر تقديراً كمياً ما تلاقيه اجزاء السد الداخلية من ضغط وشدة وهو لذلك مضطر الى استعمال نظرية المرونة (وهي تنطبق الى حد لا بأس به على البناء المسلح) وهو لكي يستعمل هذه النظرية يحتاج الى كثير من الرياضيات وهنا تؤدي المسألة الهندسية العملية الى مسألة رياضية .

وهذه المسألة الرياضية أصعب من ان نبحثها هنا وكل ما نقوله حولها كلمة عامة . ذلك اننا في وضع المسائل الرياضية التي تنجم عن المسائل العملية وفي حلها نكتفي بالتقريب ، فنحن نهمل مضطرين بعض المعطيات والشروط الثانوية في المسألة العملية اذن فلا مانع من تقبل حد من عدم الدقة في العمليات الحسابية لا سيما حيث يكون في ذلك تسهيل للحل .

٥ — ومجال القول عن التقريب واسع لا سيما وهو امر يهم الجمهور ولكنه يقتضي معرفة رياضية اختصاصية فلنكتفِ بمثال واحد بديهي مفيد .

فرسم الخرائط الجغرافية مسألة عملية هامة. وعند تخطيط رسم لأي خريطة نعتبر ان الارض كروية وهذا تقريب لا حقيقة ، فان سطح الارض يستعصي تحديده تحديداً رياضياً دقيقاً ونحن نعرف بالتأكيد انها مفلطحة عند القطبين. الا اننا إذ نعتبر الارض كروية يصير اسهل علينا ان نرسم الخريطة المطلوبة وبذا نكسب تسهيل المسألة ولا نخسر شيئاً عظيماً من جراء عدم الدقة . فلنتخيل كرة كبيرة لها شكل الكرة الارضية بالضبط وقطرها ٢٥ قدماً عند خط الاستواء . ففي هذه الكرة تكون المسافة بين القطبين اقل من ٢٥ قدماً نظراً لتفلطح الارض عند القطبين لكن هذا الفرق حوالي بوصة واحدة . اذن فاعتبار الأرض كرة تقريب عملي لا غبار عليه في مجال حاجاتنا العملية .

المسألة المساعدة

هي مسألة ننظر فيها لا من اجلها ولكن على امل ان تساعدنا في حل مسألة اخرى هي المسألة الاصلية . فالمسألة الاصلية هي الغاية والمسألة المساعدة واسطة لهذه الغاية .

ان الحشرة قد تحاول الفرار من نافذة مغلقة فهي تكر عليها مرة ثانية وثالثة دون ان تلجأ الى نافذة اخرى بجوارها مفتوحة هي النافذة التي دخلت منها . اما الرجل فهو قادر أو ينبغي ان يكون قادراً على ان يفكر تفكيراً أذكى . وميزة الانسان هي دورانه حول العقبة التي لا يمكن تخطيها مباشرة ، في ابتكاره المسألة المساعدة المناسبة عندما تستعصي عليه المسألة الاصلية . وابتكار المسألة المساعدة احدى العمليات الذهنية الهامة . فان ابتكار مسألة جديدة ووضعها في خدمة مسألة اخرى ، ان تركيز الذهن في غاية هي واسطة لغاية اخرى ، كل ذلك امارة من امارات الذكاء . وان من اهم واجباتنا ان نتعلم و (نعلّم) طريقة معالجة المسائل المساعدة بفطنة .

١ – مثال : اوجد قيمة س في المعادلة .

$$س^٤ - ١٣ س^٢ + ٣٦ = ٠$$

اذا لاحظنا ان $س^٤ = (س^٢)^٢$ ندرك فائدة ادخال $ص = س^٢$.

فهذا يعطينا معادلة جديدة :

$$ص^٢ - ١٣ ص + ٣٦ = ٠$$

وهذه مسألة جديدة مساعدة . ونحن نريد ان نستعملها كواسطة لحل المسألة الاصلية : فالمجهول ص في المسألة المساعدة يسمى بحق المجهول المساعد .

٢ – مثال : اوجد قطر متوازي المستطيلات اذا علمت أطوال حافاته الثلاث التي تلتقي في ركن من اركانه .

ففي سبيل حل هذه المسألة (القسم ٨) قد تؤدي بنا المقابلة (القسم ١٥)

الى مسألة اخرى هي ايجـــاد قطر المستطيل اذا علم ضلعاه اللذان يلتقيان في ركن واحد .

فالمسألة الجديدة مسألة مساعدة ننظر فيها أملاً في ان نربح منها ما يفيدنا في حل المسألة الاصلية .

٣ – **المربح** : والمربح الذي نجنيه من النظر في المسألة المساعدة ذو انواع عدة . فقد نستعمل نتيجة المسألة المساعدة كما في المثال ١ ، فعندما نحل معادلة ص نجد ان ص تساوي ٤ او ٩ فنستدل على أن س^{٢} = ٤ او س^{٢} = ٩ ومن ذلك نستنتج كل قيم س .

وفي حالات اخرى نستعمل طريقة المسألة المساعدة ففي المثال ٢ نجد المسألة المساعدة مسألة في الهندسة المستوية تقابل المسألة الاصلية الفراغيـــة ولكنها أسهل . فمن المعقول أن ندخل مسألة مساعدة كهذه على أمل ان نتعلم منها شيئاً – أن تتيح لنا فرصة التعرف على طرق جديدة او عمليات او وسائل تؤدي في النهاية الى حل المسألة الاصلية . وفي المثال ٢ كان اختيار المسألة المساعدة أمراً موفقاً فعندما ندرسها بدقة نجد أننا نفيد من نتيجتها ومن طريقتهـــا معاً . (انظر القسم **١٥** والمادة : هل استعملت كل المعطيات) .

٤ – **المحذور** : ونحن نبذل في حل المسألة المساعدة وقتاً وجهداً على حساب المسألة الاصلية ، فاذا نحن اخفقنا في الاستفادة منها ضاع علينا الوقت والجهد . ولذا ينبغي أن نروض قوة التمييز فينا لاختيـــار المسألة المساعدة. وهناك عدة اسباب جيـدة نبني عليها اختيارنا فقد تبدو المسألة المساعدة أسهل تناولاً من المسألة الاصلية او قد تبدو ذات ايحاء او قد تجتذب انظارنا لجمال خاص فيها . وقد تكون كل ميزتها انها جديدة وملأى بامكانيات لم نكتشفها ، او قد ننصرف اليها احياناً اذ نسأم من المسألة الاصلية وتخفق كل محاولاتنا معها .

٥ – **كيف نجد المسألة المساعدة ؟** : ان اكتشاف الحل كثيراً ما يعتمـد على اكتشاف المسألة المساعدة المناسبة . والمؤسف ان ليس ثمة طريقة لا تخطىء لهذا

الاكتشاف كما أنه ليس ثمة طريقة لا تخطىء لاكتشاف حل للمسألة المطلوبة . الا أن هنالك اسئلة وتوجيهات كثيراً ما تساعدنا ، مثـــل : انظر الى المجهول . وكثيراً ما نتوصل الى مسألة مساعدة مفيدة بتغيير المسألة الاصلية .

٦ – **المسائل المتكافئة :** تكون المسألتان متكافئتين اذا كان حل أي منهما يؤدي الى حـــل الأخرى ففي المثال ١ المسألة الاصليـة والمسألة المساعدة متكافئتان.

والآن اليك هاتين النظريتين :

(أ) المثلث المتساوي الاضلاع تكون كل من زواياه ٦٠ درجة .

(ب) المثلث المتساوي الزوايا تكون كل من زواياه ٦٠ درجة .

ليست هاتان النظريتان شيئاً واحداً ، فهما تحويان مبدأين مختلفين اذ أن احداهما تتعلق بتساوي الاضلاع والثانيـة بتساوي الزوايا . ولكن كلاً منهما تنجم من الاخرى فمسألة البرهنة على أ تكافىء مسألة البرهنة على ب .

واذا نحن أردنا أن نبرهن على (أ) فقد نجد فائدة في اتخاذ البرهنـــة على (ب) كمسألة مساعدة . فنظرية (ب) أسهل برهاناً من (أ) . وأهم من ذلك اننا نستطيع أن نرى مقدماً ان (ب) أسهل ، وان نحكم بذلك ، وأن نراه من البدء امراً معقولاً . فالواقع أن النظرية (ب) اذ تتعلق بالزوايا فحسب اكثر تجانساً من (أ) التي تتعلق بالزوايا والاضلاع .

والانتقال من المسألة الاصلية الى المسألة المساعدة نسميه التبسيط المنعكس او ذا الجانبين او المتكافىء اذا كانت المسألتان متكافئتين . فالانتقال من (أ) الى (ب) السالفتين ، منعكس ، وكذلك الانتقـــال في المثال ١ . والتبسيط المنعكس هو من بعض الوجوه اهم عنـــدنا واوفر حظاً من رغبتنا من الطرق الاخرى لاستعمال المسائل المساعدة . ولكن المسائل المساعـدة التي لا تكافىء المسألة الاصلية قد تكون عظيمة الفائدة ، كما في المثال ٢ .

٧ – سلاسل المسائل المساعدة المتكافئة : كثيراً ما نقابل هذه السلاسل في الدراسات الرياضية . فقد نريد ان نحل مسألة ما « أ » فلا نجد لها حلاً ولكن نجد مسألة اخرى « ب » تكافئها . فننظر في « ب » ويقودنا النظر الى مسألة ثالثة « جـ » تكافىء « ب » ، وننظر في « جـ » فيقودنا ذلك الى « د » وهكذا ، حتى نصل الى مسألة « ل » نعرف حلها أو نستطيع ان نحصل عليه بسهولة . ولما كانت كل مسألة تكافىء سابقتها فان المسألة الاخيرة « ل » تكافىء المسألة الاصلية (أ) .

وهكذا نستدل على حل المسألة الاصلية من « ل » التي حصلنا عليها كحلقة اخيرة في سلسلة مسائل مساعدة .

وسلاسل المسائل هذه لاحظها الرياضيون الاغريق قديماً بدليل كلمة هامة وصلت الينا من بابس . وكمثال على ذلك لننظر ثانية في المثال ١ . ولنعتبر (أ) الشرط الذي تحدد به قيمة س في المعادلة :

$$(\text{أ}) \qquad \text{س}^{٤} - ١٣\,\text{س}^{٢} + ٣٦ = ٠$$

ومن الطرق لحل هذه المسألة ان نحول الشرط الى شرط آخر نسميه (ب)

$$(\text{ب}) \qquad (٢\,\text{س}^{٢})^{٢} - ٢\,(٢\,\text{س}^{٢}) \times ١٣ + ١٤٤ = ٠$$

ويلاحظ هنا ان الشرطين (أ) ، (ب) مختلفان ، قل اذا شئت ان الاختلاف بينهما بسيط ، او انهما لا شك متكافئان ، كما هو ظاهر ، ولكنهما غير متطابقين حتماً. والانتقال من (أ) الى (ب) ليس صحيحاً فقط ولكن له قصداً واضحاً يراه كل من له خبرة في حل المسائل التربيعية. والآن نتابع العمل في هذا الاتجاه فنحصل على الشرط (جـ) .

$$(\text{جـ}) \qquad (٢\,\text{س}^{٢})^{٢} - ٢\,(٢\,\text{س}^{٢}) \times ١٣ + ١٦٩ = ٢٥$$

ونتابعه ايضاً فنحصل على :

(د) $(٢ \text{س}^{٢} - ١٣)^{٢} = ٢٥$

(هـ) $٢ \text{س}^{٢} - ١٣ = + ٥$

(و) $\text{س}^{٢} = \frac{١٣ + ٥}{٢}$

(ز)   س = ٣ او – ٣ او ٢ او – ٢ .

فكل تبسيط اجريناه هنا منعكس والشرط الأخير (ز) يكافىء الشرط الأول (أ) ولذا يكون كل من ٣ ، – ٣ ، ٢ ، – ٢ حلاً ممكناً للمعادلة الاصلية .

ففيما تقدم استنتجنا من الشرط الاصلي (أ) سلسلة شروط (ب)، (ج)، (د) ، ... وكل منها يكافىء سابقه . وهذا أمر يستحق كل العناية . فالشروط المتكافئة يفي بها جميعاً شيء واحد فاذا انتقلنا من شرط الى شرط يكافئه لا يتغير الجواب، ولكن اذا انتقلنا من شرط الى شرط أضيق نفقد بعض الاجوبة، واذا انتقلنا الى شرط اوسع تتسرب الينا اجوبة غير صحيحة ، دخيلة ، لا شأن لها بالمسألة الاصلية . واذا نحن في معالجة سلسلة من التبسيطات انتقلنا الى شرط ضيق ثم شرط واسع فقد تضيع علينا بالكلية معالم المسألة الاصلية . فلكي نتجنب هذا الخطر يجب ان ندقق النظر بعناية في صفة كل شرط ننتقل اليه : هل هو مكافىء للشرط الاصلي ؟ وهذا سؤال يزداد اهمية عندما يكون امامنا ، لا معادلة واحدة كالسابقة ، بل مجموعة معادلات او عندما يكون الشرط شيئاً لا يعبر عنه بمعادلة كمسألة رسم هندسي مثلاً .

(قارن المادة : بابس ولا سيما الملحوظات (٢) ، (٣) ، (٤) ، (٨) ، والكلام الذي اقتبسناه هناك قبيل هذه الملاحظات مخدود اكثر مما يجب ، فهو يصف سلسلة من « مسائل الايجاد » في كل منها مجهول جديد . اما مثالنا الذي سقناه هنا فعلى عكس ذلك لأن مسائل السلسلة تضم المجهول نفسه ولا تختلف الا في شكل الشرط . فمثل ذلك التحديد طبعاً غير ضروري) .

٨ – **التبسيط ذو الجانب الواحد:** لدينا مسألتان أ ،ب، ولا نعرف حلها ، وانما نعرف اننا اذا حللنا أ نستنتج حل ب كله ، ولكن العكس لا يصح :فنحن اذا حللنا ب فقد نعرف شيئاً جديداً عن أ ولكن لا يمكن ان نستنتج حل أ كله من حل ب . ففي هذه الحالة يكون حل أ اجدى من حل ب فلنسم أ المسألة الاكثر طموحاً ، ب المسألة الاقل طموحاً .

فاذا انتقلنا من مسألة امامنا الى مسألة اخرى اكثر طموحاً او اقل فهذا تبسيط ذو جانب واحد . فهناك اذن نوعان من هذا التبسيط وكلاهما أقل فائدة من التبسيط ذي الجانبين او المنعكس .

وفي المثال ٢ تبسيط ذو جانب واحد ينقلنا الى مسألة اقل طموحاً ، فنحن اذا استطعنا ان نحل المسألة الاصلية ، مسألة متوازي المستطيلات الذي ابعاده أ ، ب ، جـ ، نستطيع ان نحل المسألة المساعدة بوضع جـ = صفر ، والحصول على مستطيل بعد أ ، ب .

وكمثال آخر على التبسيط ذي الجانب الواحد الذي يكون الانتقال فيه الى مسألة اقل طموحاً راجع مادة : التخصيص (٣) ، (٤) ، (٥) . ومن هذين المثالين يظهر اننا قد نوفق في اتخاذ المسألة الاقل طموحاً تكأة نتكىء عليها وعلى شيء آخر في الوصول الى حل للمسألة الاصلية . والتبسيط ذو الجانب الواحد الذي يكون الانتقال فيه الى مسألة اكثر طموحاً قد يكون ايضاً خطوة ناجحة .

(انظر مادة : التعميم ، ٢ ، والانتقال من المسألة الاولى الى الثانية في مادة: الاستقراء والاستقراء الرياضي ، ١ ، ٢) .

فان المسألة الاكثر طموحاً قد تكون اسهل حلاً وهذا هو بدعة المخترع .

المصطلحات ، قديمها وحديثها

كل وصف للمجهود الذي في حل المسائل لا يخلو من غموض . فهـــو مجهوذ يعرفه كل واحد وكثيراً ما نناقشه ولكنه كغيره من المجهودات الذهنية يصعب وصفه . ونظراً لأنه لم يدرس دراسة منظمة لا نجد مصطلحات تقنية تصفـه . اما المصطلحات نصف التقنية فكثيراً ما تزيـــده غموضاً لأن الكتاب المختلفين يستعملونها بمعاني مختلفة .

وفي القائمة التالية ادرجنا بعض المصطلحات الحديثة التي استعملناها وبعض المصطلحات القديمة التي تجنبنا استعمالها في هذا الكتاب بالاضافة الى مصطلحات اخرى قديمة استعملنا رغم ما فيها من غموض . ونرجـــو الا يلتبس الامر على القارىء اذا هو رأى هذه المصطلحات تتوالى عليه بدون امثلة تسندها .

١ — **التحليل** : عرفه بابس تعريفاً لطيفاً، وهو مصطلح مفيد يصف طريقة نموذجية لابتكار الخطة بالبدء من المجهول (او المطلوب) والعمل عكسياً نحو المعلومات (او المفروض). الا ان الكلمة قد اتخذت معاني مختلفة(مثلاً التحليل الرياضي ، والكيماوي والمنطقي) ولذا اضطررنا الى التخلي عنها فيهذا الكتاب قدر الامكان .

٢ — **الشرط** : الشرط يربط المجهول في مسألة الايجـــاد بالمعطيات (انظر « مسائل الايجاد » و « مسائل الاثبات » ، ٣) وهـو بهذا المعنى واضح مفيد ولا غنى عنه . ولكن كثيراً ما نضطر الى تفكيك الشرط الى اجزائـــه (الجزءان I ، II في امثلة التفكيك والربط ٧ ، ٨) . وهنا نجد ان كل واحد من اجزاء الشرط يسمى ايضاً شرطاً . وهذا غموض يورطنا احياناً ويمكن تجنبه بسهولة اذا ادخلنا اسماً تقنياً لاجزاء الشرط الكلي كأن نسميها « اركاناً » .

٣ — **المفروض** : المفروض جزء اساسي من النظريات الرياضية المألوفـــة (انظر « مسائل الايجاد » و « مسائل الاثبات » ، ٤) وبهذا المعنى يكون

المصطلح واضحاً لا بأس به . ولكن كل جزء من المفروض يسمى أحياناً مفروضاً حتى يغدو المفروض على هذا الاساس مفروضات . وقد يكون العلاج بان نسمي اجزاء المفروض « اركانه » مثلاً. (قارن ملاحظتنا عن« الشرط»).

٤ **الاجزاء الرئيسية للمسألة** : عرفنا هذه في « مسائل الايجاد » و « مسائل الاثبات » ٣ ، ٤ .

٥ **« مسائل الايجاد » و « مسائل الاثبات »** مصطلحان رأينا ادخالها بدل مصطلحين تاريخيين أفسدهما الاستعمال الحديث . فقديماً جرى الناس على استعمال اللفظين « مسألة » و « قضية » . ثم ان الكتب المدرسية التقليدية تستعمل لذلك خليطاً من الفاظ عدة مثل تمرين وسؤال ومسألة وعملية ونظرية وهذه كلها قد تغيرت معانيها في الاصطلاح الرياضي الحديث مما برّر لنا ادخال اسمين جديدين .

٦ – **التفكير الطردي** : استعمل هذا المصطلح عدة كتّاب بمعاني شتى واستعمله كتاب بمعنى « التركيب » (انظر ٩) ولاستعماله بهذا المعنى الاخير ما يؤيده الا أننا تجنبناه هنا .

٧ – **التفكير العكسي** : استعمله بعض الكتّاب بمعنى التحليل (انظر ١ ، ٦) . وهذا استعمال له ما يؤيده ولكننا تجنبناه .

٨ – **الحل** : هذا مصطلح واضح تمام الوضوح بمعناه الرياضي البحت . فهو يعني اي شيء يحقق الشرط في مسألة الايجاد . وهكذا يكون حلا المعادلة س^{2} – ٣ س + ٢ = ٠ هما جذراها اي العددان ١ ، ٢ . ولكن الكلمة لها معاني اخرى غير رياضية يستعملها الرياضيون مع معناها الرياضي . فهي قد تعني « طريقة حل المسألة » او « الخطوات التي تعمل لحلها » ولذا نتكلم احياناً عن « الحل الصعب » مثلاً وهي قد تعني النتيجة التي حصلنا عليها من حل المسألة فنقول احياناً : « حل جميل » . فاذا اتفق أننا تكلمنا في جملة واحدة عن

جواب المسألة وطريقة حلها ونتيجة الحل فسميناها هذه كلها باسم واحد فلا يمكن ان تكون جملتنا واضحة تمام الوضوح .

٩ — **التركيب** : هذا مصطلح عرفه بابس تعريفاً جيداً ويستحق البقاء ولكننا تجنبناه في كتابنا هذا لمثل السبب الذي من اجله تجنبنا نظيره « التحليل » (انظر ١) .

مع الامثال

ان حل المسائل جزء اساسي من نشاطنا الذهني . بل ان القسط الاكبر من تفكيرنا الواعي يتعلق بحل المسائل ، فافكارنا دائماً تستهدف غاية ما ، ونحن دائماً نبحث عن أمر ما ، او في أمر ما ، اي نحل مسألة ، الا عندما يسرح الفكر او تداعبه احلام اليقظة .

والناس يتباينون من حيث قدرتهم على تحقيق غاياتهم وحل مسائلهم . وقديماً لاحظ الناس هذا التباين ولهجوا به وعلقوا عليه . وقد خلفت لنا الامثال زبدة هذه التعليقات . ففي كل لغة حشد من أمثال تصور بشكل رائع الاجراء النموذجي الذي يتبع في حل المسائل والمبادىء الفطرية التي يشتمل عليها والحيل المألوفة التي نحتال بها على المسائل والاخطاء الشائعة التي نرتكبها سهواً او جهلاً . وفي هذه الامثال ملاحظات لبقة ، واخرى حاذقة وان تكن تخلو من نظام علمي يصفيها من التضارب والغموض .

فهناك امثال تتناقض وامثال تحتمل معاني متباينة . فمن السخف ان نتخذ الامثال شواهد موثوقة نقبلها على علاتها ، ولكن جدير بنا ألا نهمل ما فيها من وصف وتمثيل للاجراءات الهورستيكية .

وقد يكون من الممتع ان نجمع ونبوب الامثال التي تتعلق برسم الخطة وتلمس الوسائل وتخير الاسباب لحل المسائل . ولكننا لا نستطيع أن نفسح لها

فأهنا الا مجالاً ضيقاً محدوداً نسرد فيه بعض الامثـــال التي تتعلق بالتقسيمات الرئيسية للحل التي بيناها في الثبت وشرحناها في القسمين ٦ ، ١٤ وسواهما.

١ — اولى خطوات الحل هي ان نفهم المسألة . والمثل يقول : لا تهرف قبل ان تعرف ، اذا ساء الفهم ساء الجواب ، اساء فهماً فأساء اجابة . وعلينا ان نرى بوضوح الغاية التي نعمل من اجلها : فكر في النهاية قبـل البداية ، والاعمال بخواتيمها . ولكن بعض الناس لا يأبهون بذلك ، وكثير منهم من ينصرفون الى محاولة الحل قبل ان يفهموا الفهم اللائق ما يطلب منهم ان يعملوا او يثبتوا وفي ذلك تقول الامثال : الاحمق ينظر الى اول الطريق والعاقل ينظر الى آخرها . فان لم يكن الهدف واضحاً في اذهاننا فقد نشت عن المسألة وقـــد نضيعها : والعاقل يبدأ حيث ينتهي والجاهل ينتهي حيث يبدأ .

وليس يكفي ان نفهم المسألة بل ينبغي ايضاً أن نجد الرغبـــة في حلها . وليس من امل في حل مسألة صعبة ان لم تتوفر الرغبة في ذلك فان هي توفرت فالأمل قريب : ومن جد وجد ؛ عارك بجدٍّ أو دع .

٢ — ووضع الخطة وادراك فكرة الحل اهم الخطـوات . والفكرة النيرة قد تكون ضربة حظ ، او الهاماً من الله ، ولكن ينبغي أن نكون اهلاً لها : فالحظ ابوه الجد ، ومن صبر وتأنى نال ما يتمنى ، واذا اراد احدكم امراً فعليـه بالتؤدة . فان فشلت مرة فجرب مرات . فالشجرة لا تقطع بضربـة واحدة . ولكن التكرار على علاته لا يكفي ان لم نغير وسائله ونعدل طرقه : فكل قناة رمح ، وكل الطرق تؤدي الى الطاحون ، وان ضاع مفتاحـــك فجرب سائر المفاتيح .

وعلينا ان نعدل طرقنا حسب الظروف : انشر شراعك في مهب الريح ؛ أجر الأمور على اذلالها ؛ على قدر فراشك مد رجليك ؛ ان لم يكن ما تريد فأرد ما يكون . واذا أخفقت معك طريقة فعليك بطريقة اخرى : فالعاقـل

يعدل رأيه والجاهل يتشبث به .وعلينا أن نتوقع الفشل ونعد العدة للمفاجآت : سهم في قوسك وسهم في جعبتك . فاذا نحن ضيعنا الوقت ونحن نتنقل من تجربة الى تجربة دون تقدم فهناك الامثال الساخرة : أسائر اليوم وقد زال الظهر ؟ حلي واربطي والنهار طويل . وقد نتجنب اخطاء كثيرة اذا ركزنا الذهن في الغاية التي نبغي : فغاية الصياد ان يصيد لا ان ينصب الشباك ويلهو .

ونحن نقدح الذهن لنستخلص شيئاً يفيدنا ولكنا قد نقع على هذا الشيء فلا نتنبه له ، وقد لا يكون الخبير اكثر معرفة من قليل الخبرة ولكنه اقدر على الاستفادة مما يعرف . وفي الامثال اوصاف عدة للعاقل : فهو يحول التراب ذهباً وهو يعرف من اين تؤكل الكتف وهو يقل الحز ويصيب المفصل وان هبت رياحه يغتنمها ، وهو يهتبل الفرص . والامور تتشابه مقبلة ولا يعرفها الا ذو الرأي فاذا ادبرت يعرفها الجاهل كما يعرفها العاقل .

٣ – وينبغي ان نبدأ بتنفيذ خطتنا عندما تنضج الخطة لا قبل ذلك . فالعجلة من الشيطان ؛ ورب عجلة تهب ريثاً ، وفي العجلة الندامة وفي التأني السلامة . انظر قبل ان تظفر ، واعلم حيث تضع ثقتك .

ولكن ينبغي ألا نضيع الوقت بالتردد : فمن يخشَ البلل لا يركب البحر ؛

على المرء ان يسعى ويبذل جهده وليس عليه أن تتم المقاصد

واعقل وتوكل .

وعلينا أن نزن الامور بميزان العقل لا هوى النفس ومن هنا جاء تحذير الاجيال من الخطأ الشائع : النفس تصدق ما تشتهي .

وعندما نرسم الخطة انما نضع خطوطها العامة ، اما التفاصيل فينبغي أن نتأكد انها تتخذ مواضعها المناسبة في خطتنا العامة ومن ثم نتناولها واحدة بعد الاخرى والأمثال لها في هذا ايضاً حديث : رويداً رويداً ، الطفرة محال ، أتبع الفرس لجامها والدلو رشاءها .

الرفق يمـن والأناة سعادة فأستأن في رفق تلاق نجاحاً

وعند تنفيذ الخطة نرتب خطواتها ترتيباً مناسباً هو على الغالب على عكس الترتيب الذي به ابتكرناها وفي ذلك يقول المثل : ينتهي الجاهل حيث يبـدأ العاقـل .

٤ — ومراجعة الحل بعد الفراغ منه مرحلة هامة عظيمة الفائدة : والعاقل من فكر مرتين .

وحينما نعيد النظر في الحل فقد نجد شيئاً جديداً يؤيد نتيجتنا فبرهانان خير من واحد ، ومرساتان ادعى للأمان .

٥ — وليس هذا كل ما في الامثال ولكنـه قد يكون صفوة ما يتعلق في موضوعنا منها . وثمة نواح اخرى للحل ذات نظام معقد وكيان حاذق وهذه قل ان تتناولها حكمة الامثال .

ولوصف هذه النواحي المعقدة وضعنا عبارات نحاكي بها لغة الامثال واليك بعضا من هذه العبارات :

الغاية توحي بالواسطة .

صديقاتك الخمس هي ماذا ولماذا ومتى واين وكيف . فاذا شئت المشورة فسل ماذا وسل لماذا وسل متى وسل اين وسل كيف ، ولا تسل سواها .

لا تسلم بشيء ، ولكن ضع شكك في موضع الشك .

اذا عثرت بالفطر او عثرت بفكرة فانظر حواليك فالفطر والفكر ينموان جماعات .

المقابلة او القياس

المقابلة ضرب من التشابه . فالشيئان المتشابهان يتفقان من بعض الوجوه .

الشيئان المتقابلان يتفقان من حيث تشابه علاقات معينة بين اجزائهما المتناظرة .

١ — فالمستطيل يقابل متوازي المستطيلات لأن العلاقات بين اضلاع المستطيل تشبه العلاقات بين وجوه متوازي المستطيلات :

كل ضلع في المستطيل يوازي ضلعاً آخر فيه ويعامد الضلعين الباقيين .

وكل وجه في متوازي المستطيلات يوازي وجهاً آخر فيه ويعامد الوجوه الباقيـــة .

فاذا اعتبرنا ضلع المستطيل « حداً » من حدوده ووجه متوازي المستطيلات حداً من حدوده يمكن ان نضم الفكرتين السابقتين في واحدة شاملة هي ان كل حد فيهما يوازي حداً آخر ويعامد الحدود الباقية .

وهذا تعبير عن العلاقات المشتركة بين الشيئين اللذين قارناهما : اضلاع المستطيل ووجوه متوازي المستطيلات . والمقابلة بين هذين الشيئين قائمة من جراء هـــذه العلاقات المشتركة .

٢ — والمقابلة تسيطر على كل تفكيرنا سواء في احاديثنا اليومية واستنتاجاتنا العابرة او في تعبيراتنا التقنية ونتاجنا العلمي الرصين في اعلى مراتبـــه . ونحن نستعمل المقابلة على مستويات مختلفة . فالناس عادة يستعملون مقابلات غامضة فيها التباس ، ناقصة يعوزها التوضيح . ولكن المقابلة قـــد ترتفع الى مستوى الدقة الرياضية . وكل ضروب المقابلة قد تلعب دوراً في اكتشاف الحل فينبغي ألا نستهين بأي ضرب منها .

٣ — ويجدر أن نسعد اذا نحن في سبيـــل حل مسألة من المسائل عثرنا على مسألة اسهل تقابلها . ففي القسم **١٥** كانت مسألتنا الاصليـــة تتعلق بقطر متوازي المستطيـــلات وعندما وجهنا تفكيرنا الى المسألة السهلة التي تقابلها ، مسألة قطر المستطيل ، توصلنا الى حل المسألة الأصلية . ولندرس الآن مثـــالاً آخر من هذا النوع . فليكن المطلوب ان نحل المسألة التالية :

أوجد مركز ثقل الهرم الثلاثي المتجانس .

بدون معرفة لحساب التكامل وبدون المعرفة الكافية في علم الفيزياء لا يسهل حل هذه المسألة التي كانت تعتبر مسألة علمية شائكة في عصري ارخميـــدس وجليليو . ولكن قد نحلها باقل ما يمكن من مقدمات علمية اذا نحن عثرنا على مسألة سهلة تقابلها . وهنا تبدو للذهن بصورة طبيعية نظيرة هـــذه المسألة في الهندسة المستوية :

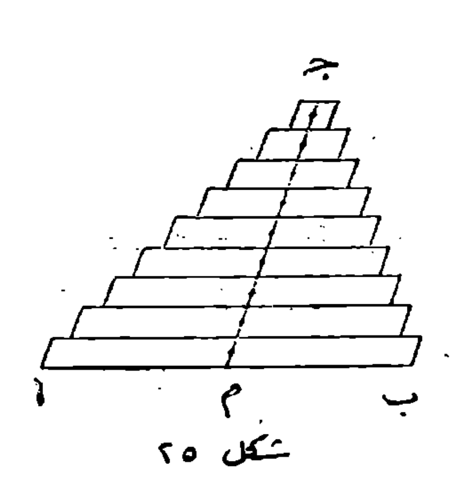
اوجد مركز ثقل المثلث المتجانس .

فعندنا الآن مسألتان لا واحدة . ولكن حل مسألتين قد يكون اسهل من واحدة اذا استطعنا أن نربط بينهما بفطنة .

٤ ـ ولندع جانباً ، الى حين ، المسألة الاصلية عن الهرم الثلاثي ، ولنركز تفكيرنا في المسألة السهـلة التي تقابلها ، مسألة المثلث . فلكي نحلها يجب أن نعرف شيئاً عن مراكز الثقل والمبدأ التالي مقبول عقلاً ، وهو ينحدر الى الذهن بشكل طبيعي :

اذا كان لدينا مجموعة من الكتل وكانت مراكز اثقالها في مستوٍ واحد فمركز ثقل المجموعة كلها يقع في هذا المستوى نفسه .

وهذا المبدأ فيه كل ما نحتاج اليـه في حالة المثلث فهو اولاً يقضي بان مركز ثقل المثلث في مستوى المثلث نفسه . ثم اذا نحن اعتبرنا المثلث مجموعة شعيرات (شرائح دقيقـة ، متوازيات اضلاع متناهية الدقة) توازي احـــد اضلاع المثلث (الضلع أ ب في شكل ٢٥) . فمركز ثقل كل شريحة (كل متــوازي اضلاع) هو كما



شكل ٢٥

لايخفى منتصفه ، وكل هذه المنتصفات تقع على الخط الذي يصل الرأس جـ بالنقطة م منتصف أ ب . (انظر الشكل ٢٥) .

فكل مستوٍ يمر بالمستقيم المتوسط جـ م يحوي مراكز اثقال الشعيرات التي يشتمل عليها المثلث وهذا يفضي الى القول بان مركز ثقل المثلث كله يقع على هذا المستقيم المتوسط . فهو بالمثل يجب ان يقع على كل من المستقيمين المتوسطين الآخرين فلا بد اذن الا أن يكون نقطة تقاطع المستقيمات المتوسطة الثلاثة .

ويستحسن ان ندلل الآن بالهندسة المجردة ، مستقلة عن اي اعتبار ميكانيكي ، على ان المستقيمات المتوسطة الثلاثة تلتقي في نقطة واحدة .

٥ — اما وقد حللنا مسألة المثلث فقد سهلت مسألة الهرم الثلاثي . فالمسألة التي حللناها تقابل المسألة الجديدة وبحلها حصلنا على نموذج نحتذيه .

ففي الحل السابق الذي سنحتذيه اعتبرنا المثلث أ ب جـ مجموعة شعيرات توازي ضلعه أ ب فلنعتبر الهرم الثلاثي أ ب جـ د مجموعة شعيرات توازي حافته أ ب .

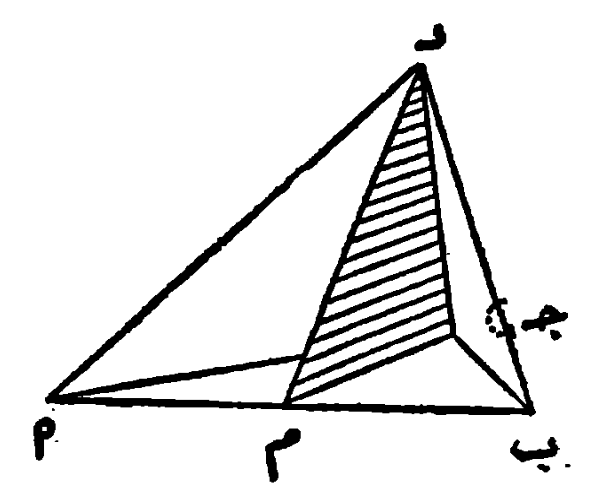
ومنتصفات الشعيرات التي تقع كلها على مستقيم واحد هو المستقيم المتوسط الذي يصل بين م ، منتصف أ ب ، والرأس المقابل له ، جـ . وكذلك منتصفات الشعيرات التي يتكون منها الهرم تقع كلها في مستو واحد هو الواصل بين م منتصف أ ب وبين الحافة المقابلة جـ د (انظر شكل ٢٦) .

ولنسمّ هذا المستوى م جـ د بالمستوى المتوسط للهرم الثلاثي .

وفي حالة المثلث نجد ثلاثة مستقيمات متوسطة مثل م جـ كل منها يمر بمركز ثقله فهي اذن تتلاقى في نقطة هي بالضبط مركز ثقل المثلث . وفي حالة الهرم الثلاثي نجد ستة مستويات متوسطة مثل م جـ د يصل كل منها بين حافة من حافاته ومنتصف الحافة المقابلة لها وعلى كل منها يقع مركز ثقل الهرم . فهذه المستويات الستة تتلاقى اذن في نقطة واحدة هي بالضبط مركز ثقل الهرم .

٦ – اذن فقد حللنا مسألة مركز ثقل الهرم الثلاثي المتجانس . ولكي نكمل الحل نجد من المستحسن ان ندلل الآن بالهندسة المحضة مجردة من الاعتبارات الميكانيكية ان المستويات الستة المذكورة تتلاقى في نقطة واحدة .

وعندما حللنا مسألة مركز ثقل المثلث المتجانس رأينا ان من المستحسن ان ندلل ، تكملة للحل ، على ان المستقيمات المتوسطة الثلاثة تلتقي في نقطة واحدة ، فجابهتنا مسألة تقابل المسألة التي امامنا الآن ولكنها تبدو اسهل .



فهنا ايضاً نستطيع ، اذا شئنا ان نحل مسألة الهرم الثلاثي ، ان نستعمل المسألة السهلة التي تقابلها مسألة المثلث (وسنعتبرها هنا محاولة) . فنحن في الواقع اذا نظرنا الى المستويات المتوسطة الثلاثة التي تمر بالحافات د أ ، د ب ، د جـ ، المبتدئة من الرأس د نجد كلاً منها يمر ايضاً بمنتصف الحافة المقابلة (فالمستوى المتوسط الذي يمر بالحافة د جـ يمر ايضاً بالنقطة م (انظر شكل ٢٦) .

اذن فهذه المستويات المتوسطة الثلاثة تقطع مستوى المثلث أ ب جـ في مستقيماته المتوسطة الثلاثة .

وهذه تتلاقى في نقطة واحدة (حسب نتيجة المسألة المطابقة السهلة) فهذه النقطة مثل د نقطة مشتركة بين المستويات المتوسطة الثلاثة . فالمستقيم الواصل بين النقطتين يكون اذاً مشتركاً بين هذه المستويات .

فقد برهنا اذن على ان ثلاثة من المستويات المتوسطة الستة وهي الثلاثة التي تمر في د ، تشترك في خط مستقيم واحـــد . والقول نفسه يصدق بالمماثلة على المستويات المتوسطة الثلاثة التي تمر في أ ، وكذلك الثلاثة التي تمر في ب ، وكذلك الثلاثة التي تمر في جـ . فاذا ربطنا هذه الحقائق ربطاً مناسباً نستطيع ان نثبت

ان المستقيمات المتوسطة الستة تلتقي في نقطة . (المستويات المتوسطة الثلاثة التي تمر باضلاع المثلث أ ب ج تحدد نقطة مشتركة وثلاثة خطوط تقاطع تلتقي في هذه النقطة فحسب البرهان السابق يمر بكل خط من خطوط التقاطع مستو آخر من المستويات المتوسطة) . ٧ – في كل من ٥ ، ٦ اردنا ان نحل مسألة عن الهرم الثلاثي فلجأنا الى حل مسألة مقابلة سهلة عن المثلث . والحالتان تختلفان من ناحية هامة : ففي ٥ استعملنا طريقة المسألة المقابلة السهلة وقلدناها خطوة خطوة . اما في ٦ فقد استعملنا نتيجة المسألة ولم ننظر للطريقة التي ادت اليها . ونحن احياناً قد نأخذ المسألة المقابلة السهلة فنستعمل طريقتها ونتيجتها معاً . ومثالنا السابق يصح مثالاً على ذلك اذا اعتبرنا المسألتين في ٥ ، ٦ فرعين من مسألة واحدة .

وهو مثال نموذجي . فلكي نحل مسألة ما يمكن ان نحل مسألة اسهل تقابلها ثم نستعمل طريقة الحل او نتيجته او كليهما . بيد اننا في الحالات الصعبة قد نجابه مشاكل لم تبرز لنا في هذا المثال . وقد يصدف خاصة ان حل المسألة المقابلة لا يؤدي مباشرة الى حل المسألة الاصلية .

وهنا قد يستدعي الامر ان نعيد النظر في الحل فنغيره أو نعدّله حتى اذا نحن جربنا اشكالاً عدة له قد نقع على شكل يؤدي الى حل المسألة الاصلية .

٨ – ومن المستحب ان نتنبأ عن النتيجة او بعض ملامحها على الأقل ، على اساس يقبله العقل . وهذه التنبؤات المعقولة تعتمد على المقابلة .

مثلاً ، قد نعرف ان مركز ثقل المثلث المتجانس يطابق مركز ثقل رؤوسه الثلاثة (أي مركز ثقل ثلاث كتل متساوية موضوعة عند رؤوسه) . فاذا عرفنا ذلك نستطيع ان نقدر ان مركز ثقل الهرم الثلاثي يطابق مركز ثقل رؤوسه الأربعة .

وهذا التقدير استدلال بالمقابلة فنحن اذ نعرف ان المثلث والهرم الثلاثي

يتفقان في كثير من الوجوه نقدر انهما قد يتفقان ايضاً في وجـه آخر جديد . ومن الحمق ان نعتبر ان هذا التقدير ، وان يكن مقبولاً عقلاً ، حقيقة مؤكدة . ولكن حمقاً ايضاً ، حمقاً اكبر ، ان نتغاضى عن هذا التقدير المعقول .

ويبدو ان الاستدلال بالمقابلة اعم انواع استنتاجاتنا ولعله ايضا في مقدمة الانواع الجوهرية منها . انه يفضي الى تقديرات معقولة الى حد ما وهـذه قد تؤيدها التجربة والتفكير الرصين وقد يثبتان بطلانها . فالكيماوي الذي يجري تجاربه على الحيوانات ليستدل منها على تأثير ادويته على الانسان انما يحصل على استنتاجاته بالمقابلة . ولكن بالمقابلة ايضاً حصل طفل صغير أعرفـــه على النتيجة التالية عندما أرادوا اخذ كلبه الذي يحبه الى البيطري فسأل الطفل :

« من هو البيطري ؟ » .

« طبيب الحيوانات » .

« واي حيوان هو طبيب الحيوانات ؟ »

٩ — وعندما تكون المقابلة بين الشيئين من عـدة وجوه يكون الاستنتاج اقوى مما لو كانت هذه المقابلة من وجوه قليلة . ولكن هنا ايضاً نجد النوع خيراً من الكمية فالمقابلات القاطعة الجلية اكبر وزناً من التشابهات الشاحبة ، والحالات المرتبة ترتيباً منظماً اعلى قدراً من الحالات المحشودة بلا نظام .

ففيما سبق (٨) توصلنا الى تقدير عن مركز ثقل الهرم الثلاثي ، وهذا التقدير يستند الى المقابلة فحالة الهرم الثلاثي تقابل حالة المثلث . ونحن نستطيـع ان نزيد تقديرنا قوة . اذا نظرنا حالة اخرى مقابلة ، حالة العصا المتجانسة (اي قطعة خط مستقيم ذات كثافة ثابتة) . فالمقابلة بين :

القطعة المثلث الهرم الثلاثي لها عدة وجوه . فالقطعة في خط مستقيم ، والمثلث في مستوٍ ، والهرم الثلاثي في الفضاء . وقطعة الخط المستقيم

هي ابسط شكل محدود ذي بعد واحد ، والمثلث أبسط مضلع والهرم الثلاثي ابسط مجسم .

والقطعة ذات حدين (نقطتي طرفيها) لا بعد لهما وباطنها ذو بعد واحد .

والمثلث له ثلاثة حدود لا أبعاد لها وثلاثة احادية الابعاد (ثلاثة رؤوس وثلاثة اضلاع) وباطنه ذو بعدين .

والهرم الثلاثي له اربعة حدود لا أبعاد لها وستة احاديةالابعاد واربعة ثنائية الابعاد (٤ رؤوس ، ٦ حافات ، ٤ وجوه) وباطنه ذو ثلاثة ابعاد .

وهذه الارقام يضمها الجدول التالي والاعمدة الرأسية فيه هي على التوالي للابعاد ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ والصفوف الافقية فيه هي على التوالي للقطعة والمثلث والهرم الثلاثي :

٢	١		
٣	٣	١	
٤	٦	٤	١

فإلمامة بسيطة بقوى ذات الحدين تكفي لترينا اننا هنا امام مقطع من مثلث بسكال . اذن فقد عثرنا على نظام رائع ينتظم القطعة والمثلث والهرم الثلاثي .

١٠ – وعندما نجد ان الاشياء التي نقارن بينها تترابط ترابطاً وثيقاً يصير الاستدلال بالمقابلة ذا وزن عندنا كما في المثال التالي :

مركز ثقل العصا المتجانسة يطابق مركز ثقل طرفيها ، ومركز ثقل المثلث المتجانس يطابق مركز رؤوسه الثلاثة : افلا تقوم الشبهة في ان مركز ثقل الهرم المتجانس يطابق مركز ثقل رؤوسه الاربعة ؟ أمر آخر مركز العصا المتجانسة يقسم المسافة بين طرفيها بنسبة ١ : ١ ومركز ثقل المثلث المتجانس يقسم المسافة بين الرأس ومنتصف القاعدة المقابلة له بنسبة ٢ : ١ أفلا تقوم الشبهة في ان مركز

ثقل الهرم الثلاثي المتجانس يقسم المسافة بين اي رأس والوجه المقابل له بنسبة ٣ : ١ ؟

يبدو ان من الامور البعيدة الاحتمال ان تكون التقديرات السابقة خاطئة وان ينفرط هذا العقد المنضد الجميل. وان شعور المكتشف بان النظام المتآلف البسيط لا يكون خداعاً كثيراً ما يكون دليله وهذا ما يعنيه المثل اللاتيني Simplex Sigillum Veri (البساطة خاتمة الحقيقة) .

وما تقدم يوحي بمدّ بساط البحث الى ابعاد اذ يبدو من غير المحتمل ان ما يصدق على الابعاد الثلاثة الاولى حيث ن = ١ ، ٢ ، ٣ لا يصدق فيما وراء ذلك. وهذا التقدير « استدلال بالمقابلة » ومنه يظهر ان الاستقراء مبني بشكل طبيعي على المقابلة . (انظر مادة : الاستقراء والاستقراء الرياضي) .

١١ – ننهي هذه المادة باشارة موجزة الى اهم الحالات التي ترتفع فيها المقابلة الى مستوى الدقة الرياضية .

(I) – عندما تكون المجموعتان الرياضيتان جـ ، جـَ مترابطتين بحيث ان علاقات معينة بين عناصر المجموعة جـ تسري عليها نفس القوانين التي تسري على العناصر في المجموعة جـَ .

وهذا النوع من المقابلة بين جـ ، جـَ يمثله ما رأيناه في ١ . خذ مثلاً جـ اضلاع مستطيل ، جـَ وجوه متوازي مستطيلات .

(II) – عندما تتناظر عناصر المجموعتين جـ ، جـَ من حيث علاقات معينة تناظر واحدة لواحدة أي انه اذا كانت علاقة معينة بين عناصر احدى المجموعتين فان هذه العلاقة نفسها تكون بين عناصر المجموعة الاخرى . ومثل هذه الصلة بين مجموعتين مقابلة دقيقة جداً وتسمى الايسومورفية (Isomorphism) (تشابه التكوين) أو الايسومورفية الكلية الوجوه (Holohedral) .

(III) – عندما يكون بين عناصر مجموعتين جـ ، جـَ ، من حيث علاقات

معينة تناظر واحدة — لكثيرة ومثل هذه الصلة (وهي ذات اهمية في كثير من الدراسات الرياضية العليا وبخاصة نظرية المجموعات ولا حاجة بنا الى بحثها هنا بالتفصيل) تسمى الايسومورفيـــة الجزئية الوجوه (Merohedral) او الهومومورفية وربما كان اولى ان تسمى الهوميومورفية . ويمكن ان تعتبر هذه نوعاً آخر من المقابلة الدقيقة للغاية .

نتيجة النظرية

هي نظرية تنتج مباشرة من نظرية اخرى تمّ اثباتها . واسم نتيجة النظرية بالانجليزية (Corollary) وهي كلمة من اصل لاتيني ترجمتها الحرفية « صدقة » او « بقشيش » .

النظرية المساعدة

هذا نوع من النظريات المساعدة .

فاذا كنا نبحث عن برهان لنظرية ما ، أ ، وادّى بنا البحث الى نظرية اخرى ، ب ، ووجدنا انه اذا كانت ب صحيحة فقد نستطيع بالاعتماد عليها ان نبرهن على أ ، فبالإمكان ان نسلم بصحة ب موقتاً ونؤجل اثباتهـا ونمضي في اثبات أ معتمدين على ب كنظرية مساعدة .

هذه مسألة ذات صلة بمسألتك وقد حللتها من قبل

هنا بشرى سارة . فالمسألة التي ترتبط بمسألتنا الحاضرة والتي نعرف حلها شيء نرحب به حتماً . ونحن نرحب بها اكثر اذا كانت صلتها بمسألتنا الحاضرة وثيقة وحلها سهلاً. وهناك احتمال واسع في ان حلها سيساعدنا على حل مسألتنا التي أمامنا .

هذا الوضع الذي ندرسه الآن وضع نموذجي هام. ولكي نقدر اهميته لنقارنه

بوضعنا عندما نحل مسألة مساعدة. ففي كلا الحالتين يكون هدفنا ان نحل مسألة ما أ فمن اجل ذلك نستجلب ونحل مسألة اخرى ب أملاً في ان نحصل من ذلك على ما يساعدنا في حل أ . والفرق بين الحالتين يأتي من موقفنا تجاه ب . فهنا تذكرنا مسألة قديمة ، ب نعرف حلها ولكن لا نعرف بعد كيف نفيد منه . وهناك ابتكرنا مسألة جديدة ، ب ، ونحن نعرف (أو على الاقل يبدو لنا مؤكداً اننا نعرف) كيف نفيد منها ، ولكن لا نعرف بعد كيف نحلها . فموقفنا تجاه ب هو الفارق بين الوضعين ، وعندما ينجلي موقفنا هذا يستوي الوضعان ونستطيع ان نجني الفائدة المرجوة من ب ، فنستعمل نتيجتها او طريقتها (كما بينا في المادة : المسألة المساعدة ، ٣) واذا حالفنا الحظ فنحن نستعمل النتيجة والطريقة معاً . وفي الحالة التي نبحثها هنا نعرف حل ب ولا نعرف كيف نفيد منه . وهنا يأتي السؤال : هل يمكنك ان تستفيد منها ؟ هل يمكنك ان تستفيد من نتيجتها ؟ هل يمكنك ان تستفيد من طريقتها ؟

وفي محاولتنا ان نستخدم مسألة معروفة من قبل ما يفيد في فهم المسألة الحالية . فنحن اذ نحاول الربط بين المسألتين القديمة والحديثة ندخل عناصر تناظر العناصر الهامة في القديمة . فاذا كانت المسألة ان نجد الكرة التي تحيط بهرم ثلاثي معلوم ، وهذا سؤال في الهندسة الفراغية ، فنحن نستعيد في الذهن ان قد حللنا من قبل مسألة في الهندسة المستوية تقابل هذه المسألة وهي رسم دائرة تحيط بمثلث معلوم . فعندها نتذكر اننا في مسألة الهندسة المستوية رسمنا الاعمدة المنصفة للاضلاع .

اذن فالأمر المعقول هنا ان ندخل في مسألتنا ما يقابل ذلك . وهذا قد يؤدي بنا الى ان ندخل في المسألة عناصر مساعدة جديدة هي المستويات التي تعامد حافات الهرم وتنصفها وبذا يسهل علينا متابعة حل المسألة مقتفين خطى المسألة القديمة .

وهذا مثال نموذجي ، فان استعادتنا لمسألة ذات صلة بمسألتنا حلت من قبل

يؤدي بنا إلى ادخال عناصر مساعدة في مسألتنـــا وهذا يمكننا من استخدام المسألة القديمـــة استخداماً مجدياً في حل المسألة الحالية . وهذا ما نهدف اليه عندما ننظر في امكانية الاستفادة من مسألة قديمة فنلقي بالسؤال : هـل يلزم ان تستخدم عناصر جديدة كي يمكنك ان تستفيد منها ؟

هنا نظرية ذات صلة بنظريتك وقد حلت من قبل . هذا شكل آخر للمـادة التي نبحثها هنا تجده مشروحاً في القسم ١٩ .

هل استعملت كل المعطيات ؟

عند حل المسألة نثير في ذاكرتنا حركة ونشاطاً ، وهذا يجعل في ادراكنا للمسألة في نهايتها ما لم يكن فيه عند البدء (المادة:التقدم في العمل وانجازه ١،). فكيف اذا كنا لها الآن ؟ هل حصلنا على ما نريد ؟ هل فهمناها الفهم اللائق ؟ هل استعملت كل المعطيات ؟ هل استعملت الشرط كله ؟ والسؤال الذي يناظر هذا في « مسائل الاثبات » هو هل استعملت المفروض كله ؟

١ – وكمثال على ذلك نعود الى مسألة متوازي المستطيلات التي رأيناهـا في القسم ٨ (وبحثناها في الأقسام ١٠ ، ١٢ ، ١٤ ، ١٥) . فرب طالب يقع على فكرة ايجاد قطر الوجه : $\sqrt{أ^2 + ب^2}$ وبعد ذلك يقف فلا يتقدم . هنا اذا اسعفه المدرس بقوله .هل استعملت كل المعطيات ؟ فقلما يخفق فيملاحظة ان $\sqrt{أ^2 + ب^2}$ ، لا يحتوي علىالعنصر المعطى ج ، فيحاول ان يدخله فيحسابه وبذا تتاح له فرصة الوقوف وجهاً لوجه امام الفكرة الحاسمة ، فكرة المثلثالقائم الذي ساقاه $\sqrt{أ^2 + ب^2}$ ، ج ووتره القطر المطـلوب لمتوازي المستطيـلات . (ولمزيد من الأمثلة انظر المادة : العناصر المساعدة ٣) .

والاسئلة التي نناقشها هنا عظيمة الاهمية . وفائدتها في ايجاد الحـل تبدو من المثال السابق، وهي تساعدنا ايضاً في اكتشافموطن الضعف في فهمنا للمسألة ،

ثم هي قد توقفنا على عنصر مفقود نستجلبه للحل . انها لنا دليـل وخط سير مرسوم نسير عليه في تفتيشنا عن حل ، ثم بها نجد فرصة كبيرة للعثور على الفكرة الحاسمة .

٢ — وهذه الاسئلة لا تنحصر فائدتها في بناء الطريقة ولكنها تفيـــد في تحقيقها ايضاً . ولكي نجعل كلامنا اكثر تحديداً لنفترض أننا نريد تحقيق نظرية المفروض فيها ثلاثة عناصر كلها ضرورية كي تصح النظرية واذا سقط منها واحد اختلت النظرية ولم تصح . فاذا كان البرهان لا يأخذ بعـين الاعتبار عنصراً ما من هــذه العناصر فالبرهان لا شك خاطىء . هــــل استعملت في برهانك كل المفروض ؟ هـــل استعملت العنصر الاول ؟ اين استعملت العنصر الاول ؟ اين استعملت العنصر الثاني ؟ الثالث ؟ ففي الاجابة عن هذه الاسئلة تحقيق البرهان، وهو تحقيق فعال خصب وهو ضروري لفهم الطريقة فهماً جيداً اذا كانت طويلة مثقلة . وهذا ما يعرفه « القارىء الذكي » .

٣ — وهذه الاسئلة تستهدف التأكد من اكتمال فهمنا للمسألة ، ففهمنا يكون حتماً ناقصاً اذا نحن لم ندخل في حسابنا اياً من العناصر الرئيسية في المعطيات او الشرط او المفروض ، وهو يكون ايضاً ناقصاً اذا نحن لم ندرك المعنى المقصود من احد المصطلحات الجوهرية في المسألة . فلكي نختبر فهمنا يجب ان نسأل ايضاً : هل اخذت بعين الاعتبـــار كل المبادىء الرئيسية في السؤال ؟ انظر مادة : التعريفات ، ٧ .

٤ — بيد ان ما تقدم يجدر ان يؤخذ بحذر وقيود . فتطبيق ملاحظاتنا كما هي ينبغي ان يشترط فيه ان تكون المسائل « معقولة » و « مصوغة في قالب متقن » .

فمسألة الايجاد تكون متقنة الصياغة ومعقولة اذا احتوت على كل المعطيات اللازمة بدون حشو لا يلزم وان يكون شرطها كافياً لا لغو فيه ولا تناقض. وفي حل مسألة كهذه يجب ان نستعمل بالطبع كل المعطيات وكل الشرط .

اما « مسألة الاثبات » فموضوعها نظرية رياضية فاذا كانت متقنة الصياغة معقولة كانت كل كلمة في المفروض لازمة لاثبات المطلوب . وفي البرهنــة على نظرية كهذه يجب ان نستعمل بالطبع كل ما في المفروض .

والمسائل الرياضية التي نقابلها في الكتب المدرسية التقليدية يفترض ان تكون متقنة الصياغة ومعقولة . ولكن لا يجوز ان نعتمد على ذلك بلا تحفظ . فــاذا ساورنا ادنى شك فامامنا السؤال : هل يمكن ان يتحقق الشرط ؟ وفي محاولتنا الاجابة عن هذا السؤال أو ما يشبهه قد نقتنع ولو الى حد ان مسألتنا سليمة كما ينبغــي .

والسؤال الذي جعلناه عنوان هذه المادة ، وما يرتبط به من اسئلة يمكن بل يجب ان تلقى بلا تعديل حينما نعرف ان المسألة التي امامنا معقولة ومتقنــة الصياغة ، أو نرى على الاقل ان ليس ثمة ما يدعو الى الظن بانها على خلاف ذلك.

٥ — وهناك مسائل غير رياضية يمكن اعتبارها من ناحية ما « متقنة الصياغة » كمسألة سليمة في الشطرنج اذ يفترض ان لها حلاً واحداً وان رقعة الشطرنج لا تحوي إلا القطع اللازمة للحل ... الخ .

اما المسائل العملية فهي عادة بعيدة جداً عن اتقان الصياغة وهي تحتاج الى مراجعة دقيقة للاسئلة التي ذكرناها هنا .

هل تعرف مسألة ذات صلة بمسألتك

من العسير علينا ان نتخيل مسألة جديدة كل الجدة لا تشبه مسألة حلت من قبل ولا تتصل بها بسبب . فاذا وجدت مسألة كهذه فليس لها حل . ونحن في الواقع عندما نحل مسألة نستفيد من مسائل سبقتها فنستعمل نتائجها أو طرقها ونفيد من الخبرة التي اكتسبناها من حل المسائل . وغني عن البيان أن كل مسألة نفيد منها بشكل ما كائناً ما كان في حل مسألة امامنا يكون لها صلة قريبة أو بعيدة بمسألتنا . وهنا منشأ السؤال : هل تعرف مسألة ذات صلة بمسألتك ؟

ونحن لا نلقى في العادة صعوبة في تذكر مسائل سبق حلها مما يتصل بمسألتنا الحاضرة ، بل اننا على العكس نجد حشداً من هذه المسائل ونجد الصعوبة في اختيار اصلحها لنا أي أوثقها صلة بمسألتنا .

وهنا يحسن ان ننظر الى المجهول أو ننظر في مسألة تتصل بمسألتنا عن طريق التعميم أو التخصيص أو المقابلة .

والاسئلة التي يضمها الثبت بهذا الصدد تستهدف اثارة الذاكرة واثارة الحركة في المعارف التي اكتسبناها (المادة : التقدم في العمل وانجازه ، ١) ، وان معلوماتنا الرياضية الجوهرية مختزنة في ذاكرتنا على شاكلة نظريات سبق حلها . وهذا هو سبب السؤال : هل تعرف نظرية يمكن ان تفيدك ؟

وهو سؤال يناسب بشكل خاص « مسائل الاثبات » اي المسائل التي يراد بها البرهنة على صحة شيء أو بطلانه .

هل رأيتها من قبل ؟

لا يبعد ان نكون قد حللنا من قبل ذات المسألة التي امامنا الآن ، او قد نكون سمعنا بها ، او حللنا مسألة تشبهها . هذه كلها احتمالات يجدر الا نتغاضى عنها . فلذا نتساءل : هل رأيتها من قبل ؟ هل رأيتها بشكل آخر ؟ حتى ان كان الجواب نفياً فان السؤال يستثير في الذهن معلومات مفيدة .

والسؤال الذي جعلناه عنوان هذه المادة قد يستعمل في كل مسألة . ففي سبيل البحث عن حل نحاول ان نستحضر في ذاكرتنا كل ما يتعلق بالمسألة وان نثير من معارفنا الكامنة كل ما يناسبها (المادة : التقدم في العمل وانجازه) . ونحن لم نعرف بعد اي معلوماتنا السابقة سيكون ذا شأن في الحل ، فالاحتمالات كثيرة ولا ينبغي ان نتغاضى عن اي منها ، واي عنصر من عناصر مسألتنا سبق ان لعب دوراً في حل مسألة سابقة قد يلعب مثل هذا الدور في حل المسألة الحالية . فكل ما يتراءى لنا ان قد يكون ذا اهمية في الحصول على الحل ينبغي ان ننظر ، ما هو ؟ هل نألفه ؟ هل رأيناه من قبل ؟

هل يمكن أن يتحقق الشرط ؟

هل الشرط كافٍ لتعيين المجهول ؟ ام هو لا يكفي ؟ ام فيه لغو ؟ ام فيه تناقض ؟

كثيراً ما تفيد هذه الاسئلة في المرحلة الاولى للحل حيث لا ننتظر جواباً قاطعاً ولا نتطلب الا مجرد تقدير موقت تخميني . وكمثل على ذلك انظر القسمين ٨ ، ١٨ .

فقد يهمنا ان نرى بعض ملامح النتيجة التي نعمل للحصول عليها ، لانه عندما يكون لدينا فكرة عن الجواب الذي نسعى اليه نكون اقدر على تبين السبيل الذي نسلكه. ومن اهم ملامح المسألة عدد الاجوبة التي يمكن ان تكون لها ، وخير المسائل تلك التي يكون لها جواب واحد ، حتى لنميل احياناً الى اعتبار المسائل ذات الجواب الواحد انها هي المسائل « المعقولة » . فعلى هذا الاساس هل مسألتنا معقولة ؟ اذا نحن استطعنا ان نجيب عن هذا السؤال ولو تقديراً يزداد اهتمامنا بالمسألة ونمضي في حلها على بصيرة .

هل المسألة « معقولة » هذا سؤال يفيد في البدء اذا امكن الاجابة عنه بسهولة .

اما اذا صعبت الاجابة فقد يكون الجهد في الحصول عليها اكبر من الفائدة التي نجنيها منها . ويصدق هذا على السؤال : هل يمكن ان يتحقق الشرط ؟ وما يرتبط به من اسئلة في الثبت . الا اننا اثبتناها لأن الاجابة عنها تكون احياناً سهلة ومعقولة. فاذا كان الجواب صعباً أو غامضاً فلا داعي للالحاح فيها.

والاسئلة التالية تناظر هذه في « مسائل الاثبات » : هل يحتمل ان تكون النظرية صحيحة ؟ ام ترجح انها خاطئة ؟ والطريقة التي صيغت بها هذه الاسئلة تشير بوضوح الى اننا لا نتوقع منها اكثر من تقدير ، من جواب موقت معقول .

هل يمكنك أن تحصل على النتيجة بطريقة اخرى ؟

عندما نجد ان الحل الذي حصلنا عليه طويل متشعب فمن الطبيعي أن يذهب بنا الظن الى ان هنالك حلاً أوضح واقصر . فهل يمكن ان تحصل على النتيجة بطريقة اخرى ؟ هل يمكنك ان تراها بلمحة ؟

حتى حينما نوفق الى حل مرض فقد يلذ لنا ان نعثر على حل آخر . فنحن نرغب في اثبات اي نتيجـة نظرية بطريقتين كما نرغب في ادراك اي شيء عن طريق حاستين . وعندما نعثر على برهان نرغب في ايجاد برهان آخر كما نرغب ان نلمس الشيء باليد عندما نراه بالعين .

وبرهانان خير من واحد والمثل الانجليزي يقول : «مرساتان ادعى للامان».

١ – مثال : أوجد المساحة السطحية ح لقطعة المخروط القائم على فرض ان نصف قطر القاعدة السفلية نق ونصف قطر العلوية نقَ والارتفاع ع .

هذه المسألة يمكن ان تحل بعدة طرق فمثلاً اذا عرفنا قانون المساحة السطحية للمخروط الكامل يمكن ان نعتبر القطعة ما يبقى بعد اقتطاع مخروط صغير منه فمساحتها هي الفرق بين مساحتي المخروطين ويبقى الآن ان نعبر عن ذلك بدلالة نق ، نقَ ، ع ومن ذلك ينتج القانون :

$$ح = ط\ (\text{نق} + \text{نقَ})\ \sqrt{(\text{نق} - \text{نقَ})^{2} + ع^{2}}$$

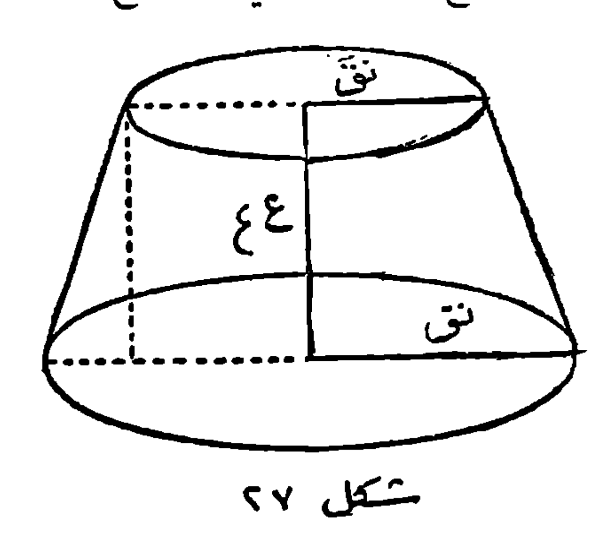
فاذا حصلنا على هذه النتيجة بطريقة ما وبعد عمليات جبرية طويلة فقـد نرغب في رؤيتها عن طريق حجة أوضح واقل التواء . هل يمكنك ان تجـد النتيجة بطريقة اخرى ؟ هل يمكنك ان تراها بلمحة ؟ ولكي نراها بداهـة قد نحاول ان نتفهم المعاني الهندسية لأجزائها المختلفة . وهنا قـد نلاحظ ان $\sqrt{(\text{نق} - \text{نقَ})^{2} + ع^{2}}$ هو طول الراسم والراسم هو طول كل من الضلعين غير المتوازيين في شبه المنحرف المتساوي الساقين الذي اذا دار حول محور يصل بين منتصفي الضلعين المتوازيين يرسم هذه القطعة . (انظر شكل ٢٧) .

ثم قد نلاحظ ان ط(نق+نقَ) = $\frac{\text{٢ ط نق + ٢ ط نقَ}}{\text{٢}}$

وهذا هو المتوسط الحسابي لمحيطي القاعدتين ، واذا اعدنا النظر فيه نجد من المناسب ان نضعه بالشكل .

$$\text{ط (نق + نقَ) = ٢ ط} \times \frac{\text{نق + نقَ}}{\text{٢}}$$

وهذا هو محيط المقطع المتوسط للقطعة (والمقطع المتوسط نعني به مقطع القطعة من مستو يوازي قاعدتها السفلية والعلوية وينصف ارتفاعها) فعندما نحصل على هذه المفاهيم الجديدة لاجزاء النتيجة تتبدى لنا في ضوء جديد . فنحن الآن نستطيع ان نقرأ القانون بهذا الشكل:



شكل ٢٧

المساحة= محيط المقطع المتوسط × طول الراسم .

وهذا يذكرنا بالقاعدة التالية لايجاد مساحة شبه المنحرف :

المساحة = الخط المتوسط × الارتفاع .

(الخط المتوسط في شبه المنحرف يوازي قاعدتيه المتوازيتين وينصف ارتفاعه) .
وهنا تبدو لنا بداهة المقابلة بين القوانين ، قانون قطعة المخروط وقانون شبه المنحرف .

ونرى بلمحة النتيجة التي حصلنا عليها لقطعة المخروط اي اننا نشعر ان قد شارفنا برهانا مباشراً قصيراً للنتيجة التي حصلنا عليها بعملية طويلة .

٢ — والمثال السابق نموذجي فنحن اذ لا نقنع بطريقتنا للحصول على النتيجة

نحاول ان نغيرها او نعدلها، فندرسها كي نزداد لها فهماً او نرى لها وجهاً جديداً ثم نحن قد نوفق الى تفسير جديد لجزء من اجزائها، ثم قد يسعفنا الحظ فنكشف معنى جديداً لجزء آخر .

فبفحص اجزاء النتيجة واحداً واحداً وتقليب النظر فيها على وجوه شتى قد نتوصل الى رؤيتها كلها في ضوء جديد . وهذا الفهم الجديد للنتيجة قد يوحي لنا ببرهان جديد .

ولا ننكر ان هذا كله محتمل حدوثه للرياضي المجرب الذي يعالج مسألة عالية دون المبتدىء وهو يصارع مسألة ابتدائية . الا ان الرياضي بغزارة علمه اكثر عرضة لاقحام فيض من المعلومات ووضع خطة كثيرة التعقيد ، ولكنه مقابل ذلك اقدر من المبتدىء على تقدير المفاهيم الجديدة لاجزاء النتيجة ثم جمع هذه المفاهيم بشكل يؤدي الى وضع النتيجة كلها بصورة جديدة .

ومع ذلك فقد يحدث حتى في الفصول الابتدائية جداً ان يأتي الطلاب بحلول كثيرة التعقيد . فعندها ينبغي على المدرس ان يبين ولو مرة او مرتين كيف يمكن ان تحل المسألة بطريق اقصر وكيف يمكن ان يبحث في النتيجة ذاتها عن دلائل حل قصير .

انظر ايضاً المادة : طريقة الخلف وطريقة البرهان غير المباشر .

هل يمكنك ان تحقق النتيجة ؟

هل يمكنك ان تحقق الطريقة ؟

ان الجواب الجيد عن هذين السؤالين يزيد ثقتنا في الحل ويعمل على تركيز معلوماتنا .

١ – يمكن اختبار النتائج الرقمية للمسائل الحسابية بمقارنتها بالحقائق المألوفة او بتقدير لهذه الحقائق مبني على الادراك الفطري فهذه المسائل تنجم عن الحاجة العملية او حب الاستطلاع فهي دائماً تستهدف الحقائق الواقعية ومن ثم فالمقارنة

بهذه الحقائق امر لا يجوز اهماله . ومع ذلك فكل مدرس يعرف ان الطلبــة قد يعطون نتائج لا يقبلها العقل . ومنهم من لا يهتز ابداً اذا جاء جوابه عن طول القارب ١٦١٣٠ قدماً وعن عمر القبطان ٨ سنوات وشهرين في مسألة يذكر فيها ان لهذا القبطان حفيداً وهذا الاهمال في مراعاة الامور الظاهرة ليس بالضرورة بلادة وانما هو عدم اكتراث بالمسائل المصطنعة .

٢ – والمسائل الحرفية اكثر صموداً للاختبارات الشائقة من المسائل العددية (القسم ١٤) . واليك مثالاً جديداً : لنأخذ قطعة هرم مربع القاعدة . فاذا كان ضلع القاعدة السفلية أ وضلع القاعدة العلوية ب وارتفاع القطعة ع ، فانا نجد ان الحجم ك :

$$\frac{أ^{٢} + أب + ب^{٢}}{٣} \times ع .$$

وقد نختبر هذه النتيجة بالتخصيص ، فاذا جعلنا ا = ب فالقطعة تصبح منشوراً والقانون يصبح $\frac{أ^{٢} ع}{٣}$ وقد نختبرها بمبدأ الوحدات ، فالقانون يعطي مكعب الطول في كل من الطرفين . وقد نختبرها بتغيير المعطيات ، فهنا نجد انه اذا زاد أي من أ ، ب ، ع فقيمة العبارة تزداد .

ومثل هذه الاختبارات لا تنحصر في النتيجة النهائية بل يمكن تطبيقها على النتائج المتوسطة وهي ذات فائدة تستلزم الاستعداد لها . انظر مادة : تغيير المسألة ٤ ويمكن استعمال هذه الاختبارات في المسائل الرقمية بتعميمها أي تحويلها الى مسائل حرفية . انظر مادة : التعميم ٣ .

٣ – هل يمكن ان تحقق الطريقة ؟ عند تحقيق طريقة الحل خطوة خطوة ينبغي ان نتجنب التكرار فالتكرار قد يصير مملاً غير مجدٍ مشتتاً للانتباه . ثم ان الخطأ الذي نرتكبه مرة قد نرتكبه ثانية تحت نفس الظروف فاذا نحن وجدنا

ان اللازم ان نراجع طريقة الحل خطوة خطوة فينبغي ان نغير على الاقل ترتيب الخطوات ، او مجموعاتها كيما يكون هناك شيء من التغيير .

٤– ولكن الارهاق يقل والاهتمام يزداد اذا نحن بدأنا بمراجعة اضعف نقاط الحـــل ومن الاسئلة المفيدة في اختيار النقاط التي يجب فحصها السؤال : هل استعملت كل المعطيات ؟

٥ – ومن الواضح ان معرفتنا الرياضية لا يمكن ان تبنى كلها على البراهين الشكلية . فأقوى نواحي معرفتنا اليوميـة هي التي تكون باستمرار عرضة للاختبار والتأييد من قبل تجاربنا اليومية .

والاختبارات القائمة على الملاحظة تجري بانتظام في ميادين العلوم الطبيعية ، وهذه الاختبارات تتخذ شكل التجارب الدقيقة والقياسات وهي في ميدان علم الفيزياء يشفعها التفكير الرياضي .

فهل يمكن ان نبني معرفتنا الرياضية على البراهين الشكلية وحدها ؟

هذا سؤال فلسفي لا يمكن مناقشته هنــا . ولكن المؤكد ان معرفتك ومعرفتي ومعرفة الطالب في الرياضيات لا تقوم على البراهين الشكلية وحدها . واذا كان ثمة معرفة قوية البنيان فلا شك انها قائمة على اساس تجريبي عريض ، وهذا الاساس يزداد عرضاً كلما صمدت مسألة من المسائل التي نحلها للاختبار .

هل يمكنك ان تستعمل النتيجة ؟

عندما نعثر بنفسنا على حل للمسألة فذلك اكتشاف . واذا كانت المسألة غير صعبة فالاكتشاف غير ذي شأن عظيم ، ولكنه اكتشاف على كل حال . واذا نحن اكتشفنا شيئاً مهما يكن متواضعاً فحري بنا ان نتلمس ما عسى ان يكون وراءه والا تفوتنا الامكانيات التي تحملها النتيجة الجديدة والا نتردد في استعمال طريقة الحل مرة اخرى . استغل نجاحك ! هل يمكنك ان تستعمـل النتيجة او الطريقة في حل مسألة اخرى ؟

١ – يسهل علينا ان نصنع مسائل جديدة عندما نألف الطرق الرئيسية لتغيير المسألة كالتعميم والتخصيص والمقابلة وتفكيك المسألة ثم ربطها من جديد . فنحن نبدأ بمسألة ما مفروضة ونستخلص منها مسائل اخرى بهذه الطرق التي ذكرناها ، ومن هذه نستخلص مسائل اخرى وهكذا . وهذا اجراء لا ينتهي نظرياً ولكنه في الواقع لا يتجاوز حداً محدوداً تستعصي بعده المسائل التي نستخلصها .

وبامكاننا ان نصطنع مسائل جديدة نحلها بسهولة باستعمال حلنا لمسألة معروفة ، الا ان هذه المسائل قد تصير سهلة الى حد تفقد معها لذتها .

فالعثور على مسألة شائقة وممكنة الحل في وقت واحد ليس بالأمر السهل ، فهو يقتضي تجربة وذوقاً وحظاً . الا ان ذلك لا يمنعنا من التفتيش عن مزيد من المسائل الجيدة عندما نوفق الى حل واحدة . فالمسائل الجيدة وبعض انواع الفطريات تشترك في صفة واحدة هي انها تنمو في مجموعات فحيث نلقى واحدة ينبغي ان ننظر حوالينا عسى ان يكون غيرها في مكان قريب .

٢ – وسنوضح بعض النقاط السابقة بالعودة الى المثال الذي درسناه في الاقسام ٨ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٤ ، ١٥ ، فلنبدأ بالمسألة التالية :

اوجد قطر متوازي المستطيلات اذا اعطيت ابعاده الثلاثة (الطول والعرض والارتفاع) .

فعندما نعرف حل هذه المسألة نستطيع ان نحل بسهولة اياً من المسائل التالية (وقد كدنا نورد الأولى والثانية منها في القسم ١٤) :

اذا اعطيت ابعاد متوازي المستطيلات فأوجد قطر الكرة المحيطة به .

هرم قاعدته مستطيل والعمود النازل من الرأس على القاعدة يمر بمنتصف المستطيل فاذا اعطيت الارتفاع وبعدي القاعدة فأوجد طول حافات الهرم .

(س$_{١}$ ، ص$_{١}$ ، ع$_{١}$) ، (س$_{٢}$ ، ص$_{٢}$ ، ع$_{٢}$) هي الاحداثيات المتعامدة لنقطتين في الفضاء ؛ فأوجد طول المستقيم الواصل بينهما .

اننا نحل هذه المسائل بسهولة لانها تكاد لا تختلف في شيء عن المسألة التي عرفنا حلها . وفي كل منها فكرة جديدة اضيفت الى المسألة الاصليـة ، الكرة المحيطة والهرم ، والاحداثيات المتعامدة . وهي فكرات تسهل اضافتها ويسهل حذفها ، واذا نحن حذفناها نعود للمسألة الاصلية من جديد .

ولكنها مسائل ذات قيمة خاصة لأن الفكرات الجديدة التي اضفناها اليها فكرات قيمة . والأخيرة منها التي تتعلق بالمسافة بين نقطتين علمت احد احداثياتها مسألة على جانب من الاهمية نظراً لأهمية موضوع الاحداثيات .

٣ – وهذه مسألة اخرى يسهل علينا حلها اذا عرفنا حل المسألة الاصلية : أوجد ارتفاع متوازي المستطيلات اذا عرفت طوله وعرضه وطول قطره .

فحل المسألة الاصلية هو في الواقع قانون يحدد العلاقة بين كميـات اربع : ابعاد متوازي المستطيلات الثلاثة وطول قطره . فاذا علمنا اي ثلاث من هـذه الكميات امكن معرفة الرابعة من القانون .

وهذا نموذج نحصل به بسهولة على مسائل سهلة الحل من مسألة نحلها ، فنعتبر المجهول الاصلي معلوماً ونجعل احدى المعطيات مجهولاً ، والعلاقـة بين المجهول والمعطيات لا تتغير في الحالتين فعندما نعثر عليها في حالـة نستعملها في الحالة الأخرى.

وهذا الانموذج لخلق مسائل جديدة باستبدال المجهول والمعطيات واحـداً بواحد غير الذي رأيناه في ٢ .

ولنبتكر الآن مسائل جديدة بطرق اخرى .

فالتعميم الطبيعي للمسألة الاصلية يؤدي الى المسألة التالية : أوجد طول قطر مجسم متوازي السطوح اذا اعطيت اطوال حافاته الثلاث التي تلتقي في احد اركانه والزوايا المحصورة بين هذه الحافات.

والتخصيص يؤدي الى المسألة التالية : اوجد قطر مكعب علم ضلعه .

والمقابلة قد تؤدي الى عدد لا حد له من المسائل واليك بعضاً من هذه نستخلصها مما رأيناه في ٢ : اوجد قطر الجسم الثماني المنتظم اذا عرفت طول حافته ، أوجد نصف قطر الكرة المحيطة بالهرم الثلاثي المنتظم ، اذا اعطيت خطي الطول والعرض لنقطتين على سطح الأرض (ولنعتبرها كرة كاملة) فأوجد المسافة الكروية بينهما .

وهذه المسائل كلها ممتعة الا ان مسألة التخصيص وحدها هي التي ندرك لها حلاً مباشراً على مبدأ حل المسألة الاصلية .

٥ – وقد نبتكر مسائل جديدة من مسألة معطاة باعتبار بعض عناصرها متغيرة . فاحدى الحالات الخاصة لمسألة وردت في ٢ هي ايجاد نصف قطر الكرة المحيطة بمكعب ضلعه معلوم فلنعتبر المكعب والمركز المشترك بينه وبين الكرة ثابتين ولنغير نصف الكرة .

فاذا كان هذا صغيراً فالكرة تقع داخل المكعب ، ثم اذا تزايد نصف القطر فالكرة تتضخم (كما يتضخم بالون الاطفال بالنفخ) وعند حد ما تمس الكرة أوجه المكعب ، ثم هي بعد ذلك تمس حافاته ، ثم هي تمر باركانه ، فما أطوال نصف القطر في هذه الحالات ؟

٦ – ان خبرة الطالب الرياضية تظل ناقصة اذا هو لم يتح له ان يحل مسائل يبتكرها بنفسه . فالمدرس اذا استخلص امام طلابه مسائل جديدة من مسألة حلـُّوها يثير عندهم حب الاستطلاع ، وهو بامكانه ان يقف عند حد ويترك لهم باب الاختراع مفتوحاً ليلجوه . فاذا هو حدثهم عن الكرة الآخذة بالاتساع التي

وأيناها قبل قليل (في ٥) فليسألهم : ما الذي ترغبون في ايجاده ؟ اي قيم نصف القطر تلذ لكم بشكل خاص ؟

هل يمكنك ان تستنتج شيئاً يفيدك من المعطيات ؟

أمامنا مسألة غير محلولة، سؤال مفتوح. فعلينا ان نجد الرابطة بين المعطيات والمجهول ، ونحن نريد ان نمد فوقها جسراً . فنحن نستطيع ان نبدأ من أي من الجانبين ، من المجهول او من المعطيات .

انظر الى المجهول وحاول ان تتذكر مسألة تعرفها فيها هذا المجهول او مجهول يشبهه . هذا توجيه يقترح عليك ان تبدأ من المجهول .

انظر الى المعطيات . هل تستطيع ان تستنتج منها شيئاً يفيدك ؟ هذا سؤال يقترح عليك ان تبدأ من المعطيات .

ويبدو لنا ان بدء التفكير من المجهول مفضل عادة (انظر مادتي بابس والعمل العكسي) الا ان الطريقة الاخرى ، طريقة البدء بالمعطيات ، لها قسطها من فرص النجاح وينبغي تجريبها عادة وهي تستحق منا ان نشرحها بمثال .

مثال : اعطينا ثلاث نقاط أ ، ب ، ج ، والمطلوب ان نرسم مستقيماً يبدأ من أ ويمر بين ب ، ج ويكون على بعدين متساويين عنهما .

ما المعطيات ؟ ثلاث نقاط أ ، ب ، ج ، مواضعها معروفة فلنرسم شكلاً يبين هذه المعطيات (شكل ٢٨) .

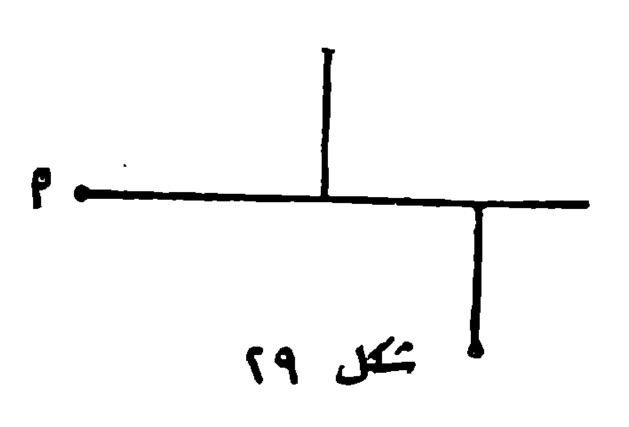
شكل ٢٨

ما المجهول ؟ خط مستقيم

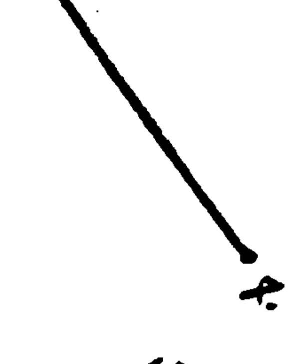
ما الشرط ؟ ان يمر المستقيم المطلوب في أ ويمر بين ب ، ج ، بحيث يكون على بعدين متساويين عنهما . فلنجمع المجهول والمعطيات في شكل تظهر فيه العلاقات المطلوبة (شكل ٢٩) .

فالشكل يوحي به تعريف المسافة بين النقطة والخط المستقيم وتظهر فيه الزوايا القائمة التي ينطوي عليها التعريف.

وهو كما سمعناه غير مكتمل فالمستقيم المجهول لم يربط ربطاً كافياً بالمعطيات أ ، ب ، جـ .



فالشكل اذن بحاجة الى خط مساعد، الى شيء يضاف – ولكن أي شيء ؟ حتى الطالب الذكي قد يشط هنا ويبعد لان هنا بالتأكيد طرقاً عدة يمكن محاولتها . ولكن خير سؤال يأخذ بيد الطالب هنا هو ان تسأله : هل يمكنك ان تستنتج من المعطيات شيئاً يفيدك ؟ وما المعطيات ؟ النقط الثلاث التي نراها في شكل ٢٨ ولا شيء غيرها . الا اننا لم نستعمل بعد بما فيه الكفاية النقطتين ب ، جـ . فعلينا ان نستخلص منهما ما يفيد . ولكن ماذا نعمل بنقطتين ؟ نصل بينهما بخط. وهكذا نرسم الخط المبين في شكل ٣٠.



فاذا ضممنا الشكلين ٢٩ ، ٣٠ فقد يظهر لنا الحل في الحال . فهنالك مثلثان قائما الزوايا وهما متطابقان وهناك نقطة جديدة عظيمة الأهمية هي نقطة التقاطع .

هل يمكنك ان تعيد نص المسألة بتعبير جديد ؟

هل يمكنك ان تعيده بتعريف آخر ؟ في هذين السؤالين نستهدف تغيير المسألة تغييراً مناسباً .

ارجع الى التعريفات . انظر مادة : التعريف .

الهورستيكا

هذا واحد من اسماء اطلقت على نوع من الدراسة لم يوضح بجلاء وهو ملحق بالمنطق او الفلسفة او علم النفس وكثيراً ما يشار اليه وقل ان يبحث بالتفصيل ويكاد يكون اليوم منسياً . وغاية الهورستيكا دراسة طرق الاكتشاف والاختراع وقواعدهما. وقد نجد آثاراً لهذه الدراسة لدى الذين شرحوا اقليدس، ويسترعي انتباهنا من هذه الآثار بشكل خاص كلمة وصلت الينا من بابس . ولكن اشهر المحاولات لتنظيم الهورستيكا ما عمله ديكار وليبنتز ، وكلاهما رياضي فيلسوف عظيم . وقد وضع برنارد بولزانو دراسة مفصلة رائعة للهورستيكا . والكتيب الحالي محاولة لاحياء هذه الدراسة بشكل حديث متواضع . انظر مادة : الهورستيكا المعاصرة .

وكلمة (Heuristic) اصلاً نعت معناه « اكتشافي » او « مؤدٍ الى لاكتشاف » .

الهورستيكا المعاصرة

دراسة يقصد منها فهم طريقة البحث عن الحل وفهم العمليات الذهنية التي تفيد بشكل خاص في الوصول الى الحل . وهناك مصادر شتى لدراسة هذا الموضوع لا يجوز تجاهل اي منها . فأي دراسة جدية للهورستيكا ينبغي ان تأخذ بعين الاعتبار اساسها المنطقي واساسها السيكولوجي والا تتغاضى عما كتب عنها السابقون امثال بابس وديكار وليبنتز وبولزانو ، والا تغفل ايضاً خبرة ذوي الخبرة النزيهة . فالخبرة في حل المسائل والخبرة في مراقبة الناس وهم يحلون المسائل ينبغي ان تكون الاساس الذي تبنى عليه دراسة الهورستيكا .وفي هذه الدراسة يجدر ان نعنى بانواع المسائل كلها لا نغفل اياً منها فنتلمس الملامح العامة لمعالجة المسائل المختلفة بغض النظر عن موضوع هذه المسائل . ولدراسة

الهورستيكا اهداف عملية فان فهم العمليات الذهنية التي تفيد بشكل خاص في حل المسائل قد يحسن اساليب التدريس ، ولا سيما تدريس الرياضيات .

وكتابنا هذا اول محاولة لتحقيق هذا المنهاج . وهنا سنبحث موقع كل مادة من مواد القاموس بالنسبة الى المنهاج .

١ – فثبتنا هو في الواقع ثبت للعمليات الذهنية التي تفيد بشكل خاص في حل المسائل . والاسئلة والاقتراحات المدرجة فيه تشير الى هذه العمليات . وبعض هذه العمليات تجده مشروحاً مرة اخرى في الفصل الثاني وبعضها مفصلاً تفصيلاً أوفى مشفوعاً بالأمثلة في الفصل الأول .

ويجد القارىء مزيداً من المعلومات عن اسئلة وتوجيهات معينة في الثبت موزعة على ١٥ مادة في القاموس عناوينها هي مطالع الفقرات الخمس عشرة التي في الثبت : ما المجهول ؟ هل يمكن ان يتحقق الشرط ؟ ارسم شكلاً ؛... ؛ هل يمكنك ان ترى النتيجة ؟ فاذا اراد القارىء معلومات عن نقطة معينة في الثبت فلينظر الى الكلمات التي في مطلع فقرتها فهذا هو عنوان المادة التي تشرحها . فمثلاً التوجيه : ارجع الى التعريفات تجده في فقرة في الثبت مطلعها : هل يمكنك ان تعيد نص المسألة ؟ وتحت هذا العنوان في القاموس يجد القارىء ما يرجعه الى مادة : التعريف فهناك شرح مفصل للتوجيه الذي يريده .

٢ – وكيفية حل المسائل امر معقد ذو عدة وجوه متباينة . والاثنتا عشرة مادة الرئيسية في القاموس تشرح بعض هذه الوجوه وسنذكر عناوين هذه المواد فيما يلي :

فعندما نكون منصرفين الى عملنا نشعر بمدى تقدمنا في هذا العمل فنغتبط عندما نتقدم بسرعة ونبتئس عندما نبطىء . فما الامر الجوهري في التقدم في العمل وانجازه ؟ ان المادة التي تشرح هذا الموضوع كثيراً ما احلنا القارىء اليها فينبغي ان تقرأ في وقت مبكر .

وعندما نحاول ان نحل مسألة ننظر في وجوهها المختلفـــة واحداً واحداً وننشرها في ذهننا ونطويها مرات ومرات وهنـــا يكون تغيير المسألة امراً جوهرياً لنا ، ويمكننا تغييرها بمعالجـة عناصرها بالتفكيك واعادة الربط او بالعودة الى التعريف ، تعريف بعض مصطلحاتها او قـــد نلجأ الى التعميم او التخصيص او المقابلة . وتغيير المسألة قد يؤدي الى استخدام العناصر المساعدة او مسألة اسهل تناولاً نعتبرها المسألة المساعدة .

وعلينا ان نفرق بوضوح بين نوعين من المسائل مسائل الايجـــاد ومسائل الاثبات وثبتنا يلائم بصورة خاصة « مسائل الايجاد » وبتعديـل بعض اسئلته وتوجيهاته يمكن تطبيقه ايضاً على « مسائل الاثبات » .

وفي جميع انواع المسائل ولا سيما المسائل الرياضية التي ليست بمنتهى السهولة نحتـــاج الى الترقيم المناسب والى الاشكال الهندسية المناسبة فهي عون كبير لا غنى عنه .

٣ - وكيفية حل المسائل لها عدة وجوه ولكن بعض هذه الوجوه لم نشر اليه هنا وبعضها مررنا عليه بايجاز . فقد كان في رأينا ان يستبعد في هذا العرض الاولي الموجز كل ما يبـــدو دقيقاً حاذقاً او فنياً عسراً او ما لا يزال موضع خـلاف .

فالتفكير الهورستيكي ، خطوة موقتة كل شأنها عندنا ان العقل يقبلها ، وهي خطوة هامة لاكتشاف الحل ولكنها لا تغني عن البرهان . لك ان تقدر ولكن اختبر تقديرك . اما طبيعة الحجة الهورستيكية فنعالجها في مادة امارات التقدم معالجة كان يمكن ان نفيض فيها وان نطيل .

وان من الأمور الهامة في بحثنا دراسة بعض النماذج المنطقية ، ولكن فضلنا ان نستبعد كل مادة فنية عسرة فلم نضع سوى مادتين تسيطر عليهما الاعتبارات السيكولوجية هما العزم والأمل والنجاح ، ثم العمـــل اللاواعي . وعدا ذلك

ملاحظة عابرة عن سيكولوجية الحيوان ، انظر المادة : العمل العكسي . وقد اكدنا مراراً ان كل انواع المسائل ولا سيا المسائل العملية ، حتى الأحاجي ، تقع ضمن نطاق الهورستيكا . واكدنا ايضاً ان قواعـــد الاكتشاف التي لا تخطىء لا تقع في نطاق اي دراسة جدية . فالهورستيكا تبحث في مسلك الانسان امام المسائل ، وقد كان هذا ، على ما يبدو ، شأن الناس من اقدم العصور ، وان حكمة الامثال ليبدو انها صفوة دراسات الناس في هذا الصدد .

٤ – وقد اضفنا بضع مواد في مسائل خاصة ومواد اخرى ذات صيغة عامة وضعناها مفصلة ظناً بانها هي او اجزاء منها قد تهم المدرسين والطلاب .

فهناك مواد تبحث في مسائل تقليدية تهمنا في الرياضيات الابتدائية مثـــل بابس ، العمل العكسي التي اشرنا اليها ، طريقة الخلف والبرهان غير المباشر ، والاستقراء ، والاستقراء الرياضي ، ووضع المعـادلات ، الاختبار بمبـــدأ الوحدات ، لماذا البرهان ؟ وهنـــاك مواد تهم المدرسين خاصة مثل المسائل الروتينية ، والتشخيص ومواد تهم الطلاب خاصة ، الطامحين منهم مثـل حلال التمارين الذكي ، القارىء الذكي ، رياضي المستقبل .

ونذكر هنا أن المحاورات بين المدرس وطلابـــه في الاقسام ٨ ، ١٠ ، ١٨ ، ١٩ ، ٢٠ وفي المواد المختلفـــة في القاموس يمكن اتخاذها نماذج للمدرس الذي يريد ان يقود طلابه للحل ، وللشخص الذي يحل تمارينه بنفسه ، فاعتبار التفكير حواراً ذهنياً او نقاشاً بين الشخص ونفسه امر غير مستهجن . والمحاورات التي ذكرناها يبدو فيها التقدم في خطوات الحل . فالذي يحل تمارينه بنفسه يحدث نفسه ويتقدم على هذا المنوال .

٥ – ولا حاجة بنا الى ذكر عناوين المواد الاخرى ولكننا سنشير الى بعض المجموعات .

فبعض المواد تحوي ملاحظات تاريخية عن موضوعنا ، عن ديكار وليبنـــتز

وبولزانو والهورستيكا ، والمصطلحات قديماً وحديثاً ، وبابس (وهـــذه المادة الاخيرة اشرنا اليها في ٤) .

وبعضها يفسر بعض المصطلحات الفنية : الشرط ، نتيجة النظرية ، النظرية المسلم بها .

وبعضها تجده مجرد اشارات ترجعك الى المادة التي تبحث عن موضوعك . وقد اشرنا اليها بنجمة في فهرس المحتويات .

٦ ــ وغاية الهورستيكا ان تكون عامة وان تدرس الامر مستقــلاً عن موضوع المسألة بحيث يمكن تطبيقها على المسائل بشتى انواعها . ولكن بحثنا هذا يتخذ امثلته كلها تقريباً من مادة الرياضيات الابتدائيـــة . ولا ننكر أن هذا حصر للموضوع ولكن نرجو ألا يكون حصراً ينقص من قيمة البحث . والواقع أن ميدان الرياضيات الابتدائية يمدنا بما نحتاج اليه من اسئلة متنوعة ثم ان دراسة حلولها سهلة وممتعة . ثم ان المسائل غير الرياضية رغم أننـــا لم نجلبها الا قليلاً كأمثلة ، قل أن تنسى . أما الرياضيات العاليـــة فلم نشر اليها اشارات مباشرة ولكنها هي الاساس الحقيقي لهذا البحث . والرياضي الخبير الذي يجد اهتماماً في هذا النوع من الدراسة يمكن ان يضيف من عنده بسهولة امثلة توضح النقاط التي نشرحها بامثلة الرياضيات الابتدائية .

٧ ــ ومؤلف هذا الكتاب يسجل شكره واعترافـــه لعدد من الكتّاب المعاصرين لم تذكر اسماؤهم في مادة الهورستيكا وهم الفيزيائي الفيلسوف ايرنست ماخ ، والرياضي جاك هدامارد ، والسيكولوجيـــين وليم جيمس وولفجانج كوهلر . ونضيف السيكولوجي ك . دنكر والرياضي ف . كراوس الذي يظهر من كتابه (الذي نشر بعد أن تقدمنا في بحثنا مدى بعيداً ، ونشر بعضه) انــه يسير معنا في اتجاه واحد .

وضع المعادلات

« وضع المعادلات كالترجمة من لغة الى لغة (راجع الترقيم ، ١) . وهـــذه المقارنة التي ذكرها نيوتن في كتابه (Arithmetica Universalis) قد تساعد على ازالة بعض الصعوبات التي تجابه الطلاب والمدرسين في بعض الاحيان .

١ – فوضع المعادلات معناه التعبـير بالرموز الرياضية عن شرط مذكور بالالفاظ . فهو ترجمة من لغة الكلام الى لغة القوانين الرياضية . وما يجابهنا من صعوبة في وضع المعادلات هو صعوبة في الترجمة .

فلكي نترجم جملة من العربية الى الانجليزية نحتاج الى امرين . فينبغي اولاً أن نفهم الجملة العربية فهماً تاماً . ثم ينبغي ان نعرف اساليب التعبير في اللغــة الانجليزية . ومثل هذا ما نقابله عندما نحاول ان نعبر بالرموز الرياضية عن شرط عبرنا عنــه بالكلمات . فينبغي اولاً ان نفهم الشرط فهماً تاماً . ثم ينبغي ان نعرف اساليب التعبير بالرياضيات .

والجملة العربية يسهل ترجمتها الى الانجليزية اذا كان يمكن ان تترجم كلمة كلمة . ولكن هنالك مصطلحات لغوية لا يمكن ان تترجم حرفيـــاً . فاذا احتوت جملتنـــا على مصطلحات من هذا النوع تصير الترجمة صعبة . وينبغي عندئذ ان نقلل اهتمامنا بالكلمات المجردة ونزيد اهتمامنا بالمعنى العام ثم قبل ترجمة الجملة قد ينبغي ان نرتبها ترتيباً جديداً .

وينطبق هذا الامر نفسه على وضع المعادلات . ففي الحالات السهلة تنقسم العبارة بنفسها الى اجزاء يمكن ان يستعاض عنها في الحال بالرموز الرياضيـــة . وفي الحالات الصعبة يضم الشرط اجزاء لا يمكن ان يعبر عنها في الحال بالرموز ، وفي هذه الحالة نصرف بعض اهتمامنا عن كلمات الشرط الى المعنى العام . وقبل ان نبدأ بوضع القوانين نحتاج الى وضع الشرط بترتيب جديد على ضوء ما لدينا من وسائل للترقيم الرياضي .

وفي جميع الاحوال ، السهلة منها والصعبة ، ينبغي أن نفهم الشرط وأن نفصل اجزاء الشرط المختلفة بعضها عن بعض وان نتساءل : هل يمكنك أن تكتبها ؟ اما في الحالات السهلة فنحن نفصل الشرط بلا تردد الى اجزاء يسهل التعبير عنها بالرموز الرياضية . واما في الحالات الصعبة فنجد أن فصل الشرط الى اجزاء مناسبة ليس بهذه السهولة .

ونرجو ان يقرأ ما تقدم مرة ثانية قبل المضي في دراسة الامثلة التالية .

٢ — اوجد كميتين مجموعهما ٧٨ وحاصل ضربهما ١٢٩٦ .

لنقسم الصفحة بخط عمودي . ولنكتب على احد جانبيه نص المسألة مفصلة باجزائها المناسبة وعلى الجانب الآخر العبارات الجبرية التي تقابل العبارات الكلامية في المسألة . فهنا نضع الاصل على اليمين والترجمة الى الرموز على اليسار .

التعبير عن المسألة

بالكلمات	بلغة الجبر
اوجد كميتين	س ، ص
مجموعهما ٧٨	س + ص = ٧٨
حاصل ضربهما ١٢٩٦	س ص = ١٢٩٦

ففي هذه الحالة قسمت العبارة الكلامية نفسها بشكل اوتوماتيكي الى اجزاء يمكن ان يكتب كل منها في الحال بعبارة جبرية .

٣ — اوجد الطول والعرض لمنشور قائم قاعدته مربع اذا علم ان حجمه ٦٣ بوصة مكعبة ومساحة سطحه ١٠٢ بوصة مربعة .

ما المجاهيل ؟ ضلع القاعدة ، وليكن س ، وارتفاع المنشور وليكن ص .

ما المعطيات ؟ الحجم ٦٣ والمساحة ١٠٢ .

ما الشرط ؟ المنشور الذي قاعدته مربع ضلعه س وارتفاعه ص يجب ان يكون حجمه ٦٣ ومساحة وجوهه ١٠٢ .

افصل اجزاء الشرط بعضها عن بعض . هنا جزءان ، احدهما يتعلق بالحجم والثاني بالمساحة . ولا نجد صعوبــــة في فصل الشرط الى جزأيه هذين ولكن لا يمكن ان نعبر عنهما في الحال . فعلينا ان نعرف كيف نحسب الحجم واجزاء المساحة المختلفة . فاذا عرفنا من الهندسة ما يكفي لذلك فلا تبقى اي صعوبة في وضعهما بشكل يسهل معه التعبير عنهما بالمعادلات . فلنكتب على الجانب الايمن من الصفحة نصاً للمسألة بترتيب مفصل يناسب الترجمة الى عبارة جبرية .

في المنشور القائم المربع القاعدة	
أوجد ضلع القاعدة	س
والارتفاع	ص
اذا اعطيت اولاً الحجم	٦٣
(فمساحة القاعدة التي ضلعها س	س^{٢}
مع الارتفاع تعين الحجم)	س^{٢}ص = ٦٣
ثم اعطيت مساحة الوجوه	١٠٢
فالمساحة تحوي وجهين مربعين	
بالضلع س	٢ س^{٢}
واربعة مستطيلات طول كل منها س	
وارتفاعه ص	٤ س ص
فمجموعهما هي المساحة	٢ س^{٢} + ٤ س ص = ١٠٢

٤ – اذا اعطيت معادلة خط مستقيم واحداثيي نقطة فأوجد نقطــة تماثل هذه النقطة بالنسبة الى هذا الخط المستقيم .

هذه مسألة في الهندسة التحليلية .

ما المجهول ؟ نقطة ، ولنفرض احداثييها (ل ، ك) .

ما المعلوم ؟ معادلة خط مستقيم ، ولنفرضها ص = م س + ن ، واحداثيا نقطة ولنفرضهما (أ ، ب) .

ما الشرط ؟ النقطتان (أ ، ب) ، (ل ، ك) متماثلتان بالنسبة الى المستقيم ص = م س + ن .

وهنا تقوم الصعوبة وهي قسمة هذا الشرط الى اجزاء يسهل ترجمتها الى لغة الهندسة التحليلية . وطبيعة هذه الصعوبة يجب ان تفهم فهماً جيداً . فقد تفكك الشرط الى اجزاء تلائم الهندسة التحليلية . ولكي نحصل على هذه الاجزاء ينبغي ان نرجع الى تعريف التماثل . فماذا نقصد بالتماثل بالنسبة الى الخط المستقيم ؟ وما العلاقات الهندسية التي يسهل التعبير عنها بالهندسة التحليلية ؟ ونحن اذ نفكر في السؤال الاول ينبغي ألا يغيب عن اذهاننا السؤال الثاني . وعلى هذا قد ننجح اخيراً في الحصول على التفكيك الذي نبتغيه .

النقطة المعطاة (أ ، ب)

والنقطة المطلوبة (ل ، ك)

يرتبطان

اولاً بحيث يكون المستقيم الواصل بينهما عموداً على المستقيم المعلوم

$$\frac{\text{ك} - \text{ب}}{\text{ل} - \text{أ}} = -\frac{\text{١}}{\text{م}}$$

وثانياً بحيث يقع منتصف الخط الواصل بينهما على المستقيم المعلوم .

$$\frac{\text{ب} + \text{ك}}{\text{٢}} = \text{م} \times \frac{\text{أ} + \text{ل}}{\text{٢}} + \text{ن}$$

٤ مسائل وتلميحات وحلول

في هذا الفصل الاخير نتيح للقارىء فرصة للتمرن

والمسائل لا تحتاج من معلومات اساسية اكثر مما تحويه برامج الدراسة في مدرسة ثانوية جيدة الا انها ليست بالغة السهولة وليست من النوع الروتيني وبعضها يحتاج الى تفكير اصيل وذكاء * .

أما التلميحات فالغاية منها ان ترشد الى النتيجة ، عن طريق اعادة جملة من الثبت وهي قد تعطي القارىء المتنبه ايماء يفتح له الطريق الى الحل .

واما الحلول فلا تعطي الجواب فقط بل تصف الطريقة التي توصل الى الجواب ولكن على القارىء ان يجري التفاصيل . وبعض الحلول تنتهي بكلمات الغاية منها فتح آفاق جديدة للقارىء .

فالقارىء الذي يبذل محاولة حقيقية لحل المسألة يجد فائدة كبرى في التلميح والحل المتعلقين بها . فاذا هو حصل على النتيجة بطريقة من عنده فقد يفيد من مقارنة طريقته بطريقة الكتاب اما اذا هو بعد جهد كبير فشل رجع الى

---

* ـ المسألة الاولى مشهورة (الا اننا نذكرها لما فيها من لذة) وكل ما عداها فمن امتحانات المسابقة في الرياضيات في جامعة ستانفورد (مع بعض التنقيح) . وبعض هذه المسائل طبع في المجلة الشهرية الامريكية للرياضيات او نشرة مجلس كاليفورنيا الرياضية وفي هذه طبع ايضاً بعض حلول المؤلف وهي هنا اعدناها مع التعديل المناسب .

التلميح فقد يجد فيه الفكرة التي تقود الى الحل والا فبالرجوع الى الحل الذي نقدمه قد يستطيع ان يكتشف الفكرة الرئيسية ثم يضع الكتاب جانباً ويجري الحل وحده .

المسائل

١ – دب بدأ من نقطة ما « ل » ثم مشى مسافة ميل متجهاً جنوباً ، ثم غير اتجاهه فمشى ميلاً آخر متجهاً شرقاً ثم دار الى يساره فمشى ميلاً آخر متجهاً شمالاً وبذا وصل الى ذات النقطة التي بدأ منها فما لون الدب ؟

٢ – يريد ابو علي ان يشتري قطعة من الأرض تامة الاستواء لها اربعة جوانب على ان يكون جانبان منها باتجاه شمالي جنوبي بالضبط وجانبان باتجاه شرقي غربي بالضبط وبشرطان يكون طول كل جانب ١٠٠ ذراع فهل يستطيع ابو علي ان يشتري مثل هذه الارض في العالم العربي ؟

٣ – عند ابي علي عشرة جيوب و ٤٤ قطعة من ذات العشرة قروش وهو يريد ان يوزعها على جيوبه بحيث يكون في كل جيب عدد يختلف عما في اي جيب آخر فهل يستطيع ذلك ؟

٤ – عند طباعة كتاب ضخم اضطرت المطبعة الى استعمال ٢٩٨٩ رقماً لترقيم صفحاته المتسلسلة فكم صفحة في الكتاب ؟

٥ – وجدت في اوراق جدي هذه الفاتورة :

٧٢ بقرة – ٦٧٩ – قرشاً

والرقمان الاول والأخير في هذا العدد الذي يظهر انه يبين مجموع الثمن وضعنا مكانهما شرطتين لأنهما ممحوان في الفاتورة ولا يمكن قراءتهما فما الرقمان الممحوان وماذا كان ثمن البقرة في ايام جدي ؟

٦ – اذا اعطيت شكلاً سداسياً منتظماً ونقطة في نفس المستوى فارسم من هذه النقطة خطاً يقسم الشكل الى قسمين متساويين في المساحة .

٧ – لدينا مربع فما المحل الهندسي للنقطة التي منها المربع (١) على زاوية مقدارها ٤٥ درجة (٢) على ٩٠ درجة (اذا كانت ل نقطة خارج المربع وفي المستوى الذي يقع فيه فان اصغر زاوية رأسها « ل » ويقع المربع داخلها هي الزاوية التي عليها يرى المربع) . ارسم المحلين الهندسيين رسماً واضحاً وصفهما وصفاً مفصلاً .

٨ – لنسم الخط المستقيم الذي يصل بين نقطتين على سطح الجسم بحيث اذا دار الجسم حول هذا الخط المستقيم زاوية اكبر من صفر° واقل من ٣٦٠° ينطبق على نفسه « محوراً » للمجسم فعلى هذا الاساس اوجد محاور المكعب ، وصف بوضوح اوضاعها وزاوية الدوران لكل منها . وعلى اعتبار ان ضلع المكعب وحدة طول فما المتوسط الحسابي لاطوال المحاور ؟

٩ – في هرم ثلاثي (ليس من الضروري ان يكون منتظماً) وجد ان حافتين متقابلتين طول كل منهما أ و هما متعامدتان وتعامدان خطاً مستقيماً طوله ب يصل بين منتصفيهما فأوجد حجم الهرم بدلالة أ ، ب واثبت جوابك .

١٠ – قمة الهرم هي رأسه الذي يقابل قاعدته : (أ) فاذا سمينا الهرم الذي تتساوى ابعاد قمته عن اركان القاعدة بالهرم المتساوي السيقان فاثبت ان قاعدة الهرم المتساوي السيقان تقع داخل دائرة مركزها هو موقع العمود النازل من قمة الهرم على القاعدة .

(ب) والآن لنعتبر ان الهرم المتساوي السيقان هو الذي تتساوى الابعاد (العمودية) لقمته عن جميع اضلاع القاعدة . فعلى هذا الاعتبار (وهو يخالف الاعتبار السابق) اثبت ان قاعدة الهرم المتساوي السيقان تحيط بدائرة مركزها هو موقع العمود النازل من قمة الهرم على القاعدة .

١١ – اوجد قيم س ، ص ، ك ، ل التي تحقق المعادلات التالية :

س + ٧ ص + ٣ ك + ٥ ل = ١٦

٨س + ٤ ص + ٦ ك + ٢ ل = — ١٦

٢س + ٦ ص + ٤ ك + ٨ ل = ١٦

٥س + ٣ ص + ٧ ك + ل = — ١٦

(تبدو الطريقة التقليدية طويلة مملة ، ففكر في طريقة مختصرة) .

١٢ — قام علي وحسن وحسين معاً في رحلة وكان حسين وحسن يقدران على المشي ويسيران بسرعة « ل » اميالاً في الساعة . اما علي فكان يشكو ألماً في رجله ولذا أخذ عربة تتسع لاثنين ولا تتسع لثالث وهي تسير بسرعة « جـ » اميالاً في الساعة . فاتفق الثلاثة على الطريقة التالية : ان يقوموا معاً فيركب حسين مع علي ويمشي حسن على قدميه ، وبعد فترة ينزل حسين فيمشي واما علي فيعود ليأخذ حسن فيركبان العربة حتى يدركا حسين وهنا يركب حسين ويمشي حسن وهكذا الى نهاية الرحلة .

(أ) كم يتقدم الثلاثة (بالاميال) كل ساعة ؟

(ب) اوجد الوقت الذي تكون فيه العربة تحمل واحداً فقط كجزء من زمن الرحلة كله .

(جـ) حقق جوابك في الحالتين الخاصتين عندما يكون ل = صفراً ، ل=جـ.

١٣ — لدينا ثلاثة أعداد تكون متوالية حسابية ، وثلاثة أعداد اخرى تكون متوالية هندسية فاذا اضفنا الحدود المتناظرة في المتواليتين تنتج الاعداد:

٨٥ ، ٧٦ ، ٨٤ ،

على التوالي . واذا اضفنا أعداد المتوالية الحسابية وحدها ينتج ١٢٦ فأوجد اعداد كل من المتواليتين .

١٤ – اوجد قيمة م اذا كانت المعادلة :

س^{٤} – (٣ م + ٢) س^{٢} + م^{٢} = ٠

لها اربعة جذور حقيقية تكون فيما بينها متوالية عددية .

١٥ – مثلث قائم محيطه ٦٠ بوصة وطول العمود النازل من رأس القائمة على الوتر ١٢ بوصة فما طول كل من اضلاع المثلث ؟

١٦ – من قمة جبل يشرف على سهل منبسط رأينا نقطتين أ ، ب في هذا السهل فاذا كان خطا النظر من قمة الجبل الى أ ، ب يصنعان بينهما زاوية ن ويصنعان مع السطح المستوي زاويتين و ، هـ على التوالي. وكانت النقطتان أ،ب على ارتفاع واحد عن سطح البحر والمسافة بينهما « جـ » فأوجد ارتفاع قمة الجبل فوق مستوى أ ، ب بدلالة الزوايا و ، هـ ، ن والمسافة م .

١٧ – لاحظ ان المجموعة :

$$\frac{١}{\underline{٢|}} + \frac{٢}{\underline{٣|}} + \frac{٣}{\underline{٤|}} + \dots + \frac{ن}{\underline{ن+١|}}$$

تساوي $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٥}{٦}$ ، $\frac{٢٣}{٢٤}$ اذا كانت ن = ١ ، ٢ ، ٣ على التوالي .

ثم قدر قانوناً عاماً (بتجربة قيم اخرى اذا شئت) واثبت صحة تقديرك .

١٨ – انظر الى هذا الجدول :

١	= ١
٣ + ٥	= ٨
٧ + ٩ + ١١	= ٢٧
١٣ + ١٥ + ١٧ + ١٩	= ٦٤
٢١ + ٢٣ + ٢٥ + ٢٧ + ٢٩	= ١٢٥

ثم قدر القانون العام الذي يحوي به هذا الجدول وعبر عنه بالرموز الرياضية ثم برهن عليه .

١٩ – شكل سداسي منتظم طول ضلعه ن (ن عـــدد صحيح) رسمت مستقيمات متساويات الابعاد وموازية لأضلاعه مقسمة الى م من المثلثات المتساوية الأضلاع ضلع كل منها وحدة فكان ٧ عدد الرؤوس .

وكان من عدد الحدود التي طول كل منها وحدة (الحد ضلع لمثلث أو مثلثين والرأس قد يكون مشتركاً بين مثلثين او اكثر) . ففي ابسط حالة اذا كان ن = ١ كان م = ٦ ، س = ٧ ، ص = ١٢ . فادرس الحالة العامة ثم عبر عن م ، س ، ص ، بدلالة ن . (التقدير مقبول ولكن البرهان افضل) .

٢٠ – بكم طريقة يمكنك ان تفك الجنيه قطعـــاً من ذات القرش والخمسة والعشرة وربع الجنيه ونصفه ؟ (تتعين الطريقة عندما يتعين عدد القطـع من كل نوع) .

تلميحات

١ – ما المجهول ؟ لون الدب . ولكن كيف يمكن ان نجد لون الدب من معطيات رياضية ؟

ما الذي نعرفه ؟ وضع هندسي ولكن يبدو فيه تناقض فكيف يمكن للدب بعد ان يمشي ثلاثة اميال بالشكل الموصوف ان يرجع الى حيث بدأ ؟

٢ – هل تعرف مسألة ذات صلة بها ؟

٣ – لو كان عند ابو علي عدد كبير من الجنيهات لما صعب عليه ان يضـع

في كل جيب مقداراً منها يختلف عما في اي جيب آخر . هل يمكنك ان تضع السؤال بشكل جديد ؟ ما اقل عدد من الجنيهات يمكن وضعه في ١٠ جيوب بحيث لا يتساوى ما في جيبين ؟

٤ – هذه مسألة ذات صلة بمسألتك : لو كان في الكتاب ٩ صفحات مرقمة فكم رقماً تستعمل المطبعة ؟ (٩ بالطبع) . هذه مسألة اخرى ذات صلة بمسألتك : لو كان في الكتاب ٩٩ صفحة مرقمة فكم رقماً تستعمل المطبعة ؟

٥ – هل يمكنك ان تضع السؤال بشكل جديد ؟ ماذا يمكن ان يكون الرقمان المحوان اذا كان الثمن الكلي بالقروش يقبل القسمة على ٧٢ ؟

٦ – هل يمكنك ان تجد مسألة اسهل ذات صلة بمسألتك ؟ مسألة اعم ؟ مسألة مقابلة ؟ (التعميم ، ٢) .

٧ – هل تعرف مسألة ذات صلة بمسألتك ؟ المحل الهندسي للنقط التي نرى منها خطاً مستقيماً محدوداً على زاوية معينة هو قوسا دائرتين يمران بطرفي الخط المستقيم ويتماثلان احدهما مع الآخر بالنسبة اليه .

٨ – افترض أن القارىء يعرف شكل المكعب وقد وجد بعض المحاور بمجرد التجربة . ولكن هل هي كل المحاور ؟ هل يمكنك ان تثبت ان ما وجدته لا زيادة عليه ؟ هل فيما وجدته مبدأ تصنف المحاور على اساسه ؟

٩ – انظر الى المجهول . المجهول حجم هرم ثلاثي . اجل اعرف حجم الهرم اذا عرفت القاعدة والارتفاع (حاصل ضربهما مقسوماً على ٣) ولكن في هذه الحالة لم نعط لا القاعدة ولا الارتفاع . هل يمكنك ان تجد مسألة اسهل ذات صلة بمسألتك ؟ (ألا ترى هرماً اسهل هو جزء من الهرم المعطى لك ؟) .

١٠ – هل تعرف نظرية ذات صلة بهذه ؟ هل تعرف نظرية ذات صلة بهذه ... ، اسهل تطابقاً ؟ نعم : ان موقع العمود هو منتصف القاعدة في المثلث المتساوي الساقين .

هذه نظرية ذات صلة بنظريتك وقد برهن عليها من قبل . هل يمكنك ان تستعمل ... طريقتها ؟ نظرية المثلث المتساوي الساقين يبرهن عليها بمبدأ تطابق مثلثين قائمين يكون العمود ضلعاً مشتركاً بينهما .

١١ – نفترض ان القارىء لا يجهل المعادلات الآتية الخطية . فكل هـذه المعادلات ينبغي ان نضمها بطريقة ما . فتش عن روابط بين المعادلات تشير الى ضمها بطريقة مفيدة .

١٢ - افصل اجزاء الشرط بعضها عن بعض . هل يمكنك أن تكتبها ؟ بين نقطة البدء ونقطة التقائهم ثانية ثلاث مراحل مختلفة :

(١) علي راكب مع حسين ،

(٢) علي راكب وحده ،

(٣) علي راكب مع حسن .

فلنعتبر ان $ن_١$ ، $ن_٢$ ، $ن_٣$ هي ازمنة هذه المراحل على التوالي . فكيف يمكنك ان تفصل الشرط الى اجزائه المختلفة ؟

١٣ – افصل اجزاء الشرط بعضها عن بعض . هـل يمكنك ان تكتبها ؟ ليكن :

أ – د ، أ ، أ + د	حدود المتوالية العددية ،
ب س – ١ ، ب ، ب س	حدود المتوالية الهندسية .

١٤ – ما الشرط ؟ الجذور الأربعة يجب ان تكون متوالية عددية . ولكن للمعادلة صفة خاصة :

ففيها القوى الزوجية للمجهول ، فاذا كان أ جـذراً فينبغي ان يكون – أ جذراً ايضاً .

١٥ ـ افصل اجزاء الشرط بعضها عن بعض . هل يمكنك ان تكتبهما ؟
يمكن ان نميز في الشرط ثلاثة اجزاء :

(١) عن المحيط ،

(٢) عن المثلث القائم ،

(٣) عن العمود القائم على الوتر .

١٦ ـ افصل اجزاء الشرط بعضها عن بعض . هل يمكنك ان تكتبها ؟
افرض ان ل ، م طولا خطي النظر (المجهولين) : و ، هـ ؛ زاويتا ميلها عن السطح المستوي على التوالي ، فهنا نميز ثلاثة اجزاء في الشرط بخصوص :

(١) زاوية ميل ل ،

(٢) زاوية ميل م ،

(٣) المثلث الذي اضلاعه جـ ، ل ، م .

١٧ ـ هل لاحظت المقامات ٢ ، ٦ ، ٢٤ ؟ هل تعرف مسألة ذات صلة بها ؟ مسألة تقابلها ؟ (الاستقراء والاستقراء الرياضي) .

١٨ ـ الاكتشاف بالاستقراء يحتاج الى ملاحظة . لاحظ ما في الطرف الايسر ، والحدود الاولى في الطرف الايمن والحدود الاخيرة . ما القانون العام ؟

١٩ ـ ارسم شكلاً فبملاحظته قد تستنتج القانون استقرائياً او قد تجد علاقات بين م ، س ، ص ، ن .

٢٠ ـ ما المجهول ؟ ما الذي نريد ان نبحث عنه ؟ حتى القصد من المسألة قد يحتاج الى توضيح . هل تتخيل مسألة اسهل تتصل بها ؟ مسألة اعم ؟ مسألة مقابلة ؟ هذه مسألة مقابلة سهلة جداً : بكم طريقة تدفع قرشاً واحداً ؟ (بطريقة واحدة) خذ الآن مسألة اعم : بكم طريقة تدفع ن قرش باستعمال هذه

القطع انصاف الجنيــــه وارباعه وعشرات القروش والخمسة والقروش ؟ تهمنا بشكل خاص الحالة ن = ١٠٠ .

ففي الحالات البسيطة الخاصة عندما تكون قيم ن صغيرة يمكن ان نتخيــل الجواب بدون طرق عالية ، بالتجربة ، وهذا جدول صغــير (يمكن للقارىء ان يحققه) .

ن	٤	٥	٩	١٠	١٤	١٥	١٩	٢٠	٢٤	٢٥
هـ ن	١	٢	٢	٤	٤	٦	٦	٩	٩	١٣

فالسطر الاول يعطي قيماً مختلفة للمبلغ الذي يدفع ونسميه ن والسطر الثاني يعطي القيم المناظرة لعدد طرق الدفع ونسميه هـ ن (واختياري لهذا الرمز سر عندي لا اريد أن اكشفه الآن) .

ونحن تهمنا الحالة هـ ١٠٠ الا ان الأمــل ضعيف في معرفة قيمتها بدون طريقة للحساب واضحة ، والواقع ان هذا السؤال يقتضي من القارىء اكثر قليلاً مما تقتضيه الاسئلة السابقة فعليه ان يخلق نظرية بسيطة .

وسؤالنا عام (معرفة هـ ن) وهو سؤال لا يبدو له رابطة فهل يمكنك ان تتخيل مسألة اسهل ترتبط بها ؟ مسألة مقابلة ؟ هذه مسألة ذات صلة بهــا بسيطـــة . احسب « أ ن » وهو عدد الطرق لدفع ن قروش ، باستعمال قطع القرش فقط (أ ن = ١) .

الحلول

١ ـ سيخطر في بالك ان الدب ابيض وان النقطة ل هي القطب الشمالي . فهل يمكنك ان تثبت صحة ذلك ؟

ان الحل مفهوم الى حد ما فلنبحثه بحثاً عاماً . ولنعتبر ان الكرة الارضية تامة التكور وان الدب نقطة متحركة . فهذه النقطة بسيرها جنوباً وشمالاً تسير على خط من خطوط الطول ، وبسيرها شرقاً تسير على خط من خطوط العرض (وهذه توازي خط الاستواء) . فهنا علينا ان نميز بين حالتين :

(١) فاذا عاد الدب الى ل على خط طول يخالف الخط الذي سار في البدء عليه فان ل هي حتماً القطب الشمالي . والواقع ان النقطة الوحيدة الثانيـة على الكرة الارضية التي يلتقي عندها خطا طول هي القطب الجنوبي ، ولكن يجب أن يبدأ الدب سيره من هذه النقطة باتجاهه شمالاً لا جنوباً .

(٢) يمكن للدب ان يعود الى النقطة وهو سائر على نفس خط الطول الذي بدأ سيره منه عندما اتجه جنوباً اذا كان في سيره مسافة ميل شرقاً قطع دائرة خط العرض كلها ن مرات تماماً حيث ن = ١ ، ٢ ، ٣ ، ...

وفي هذه الحالة لا تكون ل هي القطب الشمالي بل تكون نقطة قريبة جداً من القطب الجنوبي على خط عرض محيطه بالاميال أقل قليلاً من ٢ ط + $\frac{١}{ن}$.

٢ — نعتبر الكرة الارضية كما اعتبرناها في المسألة ١ . فالأرض التي يريدها ابو علي يحدها خطا طول وخطا عرض . تخيل اي خطي طول ثم قوساً من خط عرض متباعداً عن خط الاستواء ومحصوراً بين خطي الطول فهو لا شك يتناقص طولاً . فمركز الارض التي يريدها ابو علي يجب ان يكون على خط الاستواء . وهذا ما لا يجده في البلاد العربية .

٣ — اقـــل عدد من القطع يمكن ان يوضع في الجيب الاول هو الصفر . ثم نضع قطعة واحدة على الاقل في الجيب الثانية وقطعتين على الاقل في الثالثة ... وتسعاً على الاقل في العاشرة . فاقل عدد من القطع يلزم لتحقيق الشرط ٠ + ١ + ٢ + ٣ + ... + ٩ = ٤٥ ، وهذا ما لا يملكه ابو علي .

٤ — اذا كان عدد صفحات الكتاب ٩٩٩ يكون عدد الارقام اللازم :

٩ + ٢ × ٩٠ + ٣ × ٩٠٠ = ٢٨٨٩

فاذا كان في المجلد المعطى لنا س صفحات يكون :

٢٨٨٩ + ٤ (س – ٩٩٩) = ٢٩٨٩

س = ١٠٢٤

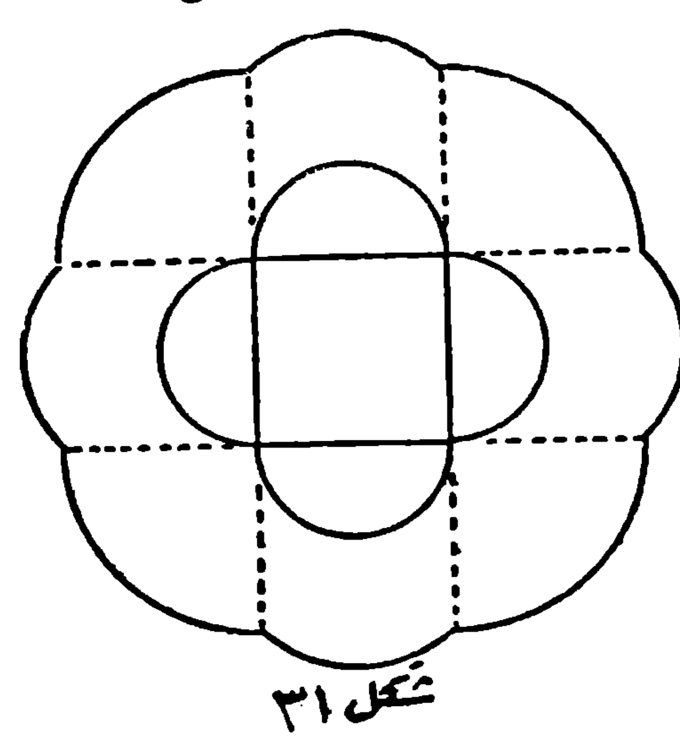
وهذه المسألة تعلمنا ان التقدير المبدئي للمجهول يكون احياناً مفيداً (وهو ضروري في مسألتنا هذه) .

٥ – اذا كان العدد – ٦٧٩ – يقسم على ٧٢ فهو يقسم على ٨ ، ٩ فلكي يقسم على ٨ يجب ان يكون العدد – ٧٩ يقبل القسمة على ٨ (لأن ١٠٠٠ تقسم على ٨) ولذلك فالعدد – ٧٩ هو ٧٩٢ فالرقم الاول المحو هو ٢ . ولكي يكون العدد ٦٧٩٢ – يقبل القسمة على ٩ يجب ان يكون مجموع الارقام يقسم على ٩ ولذا يلزم ان يكون الرقم الاخير المحو هو ٣ . فالعدد اذن ٣٦٧٩٢ وثمن البقرة في زمان جدي كان ٣٦٧٩٢ ÷ ٧٢ = ٥١١ قرشاً .

٦ – اعطينا نقطة وشكلاً له مركز تماثل وهما في مستوٍ واحد وهما في وضع معلوم . فأوجد الخط المستقيم الذي يمر بالنقطة ويقسم الشكل الى قسمين متساويين بالمساحة .

يجب أن يمر هذا الخط طبعاً بمركز التماثل (انظر : بدعة المخترع) .

٧ – مهما كان وضع المربع فيجب ان يمر ضلعا الزاوية بركنين من اركانه فامام كل ركنين اذن قوس دائرة هو المحل الهندسي لرأس الزاوية (حسب المبدأ الذي الحنا اليه) . فكل من المحلين الهندسيين المطلوبين يتكون من اقواس دوائر (٤ انصاف دوائر في (١) و ٨ ارباع في الحالة (٢)) . انظر الشكل ٣١ .



شكل ٣١

٨ – المحور يقطع سطح المكعب في ركن من اركانه أو على حافة من حافاته او وجه من وجوهه . فاذا مر المحور بنقطة على احدى الحافات (لا في ركن من الاركان) فهذه النقطة يجب ان تكون منتصف الحافة . والا فلا يمكن ان تنطبق هذه الحافة على نفسها عند الدوران . وكذلك اذا مر المحور بنقطة على احد الوجوه فيجب ان تكون هذه النقطة مركز الوجه . وكل محور يجب ان يمر طبعاً بمركز المكعب . فلدينا اذن ثلاثة انواع من المحاور :

(١) ٤ محاور يمر كل منها بركنين متقابلين ؛ على زاويتين ١٢٠° ، ٢٤٠° .

(٢) ٦ محاور يمر كل منها بمنتصفي حافتين متقابلتين ؛ الزاوية ١٨٠° .

(٣) ٣ محاور يمر كل منها بمركزي وجهي متقابلين ؛ الزوايا ٩٠° ، ١٨٠° ، ٢٧٠° . فلايجاد طول المحور من النوع الاول انظر القسم **١٢** . والنوعان الآخران يسهل ايجادهما والمتوسط المطلوب $\frac{٤\sqrt{٣} + ٦\sqrt{٢} + ٣}{١٣}$ = ١٫٤١٦

(وهذه المسألة قد تفيد في تهيئة الطالب الى دراسة البلوريات . والقارىء المطلع على حساب التفاضل والتكامل قد يلاحظ أن المتوسط الذي حصلنا عليه يقارب « متوسط العرض » للمكعب الذي هو في الواقع $\frac{٣}{٢}$ = ١٫٥

٩ – المستوى الذي يمر بحافة طولها أ وعمود طوله ب يقسم الهرم الى هرمين اسهل تناولاً وهما متطابقان قاعدة كل منهما أ ب ÷ ٢ وارتفاعها $\frac{أ}{٢}$.

فالحجم المطوب = ٢ . $\frac{١}{٣}$. $\frac{أ ب}{٢}$. $\frac{أ}{٢}$ = $\frac{أ^٢ ب}{٦}$.

١٠ – قاعدة الهرم مضلع عدد اضلاعه ن . ففي الحالة (أ) تكون :

الحافات الظاهرة متساويـــة وعددها ن . وفي الحالة (ب) تكون الابعاد العمودية النازلة من الرأس متساوية .

فاذا رسمنا ارتفاع الهرم ووصلنا طرفه السفلي باركان القاعدة في الحالة (أ) وباطراف الابعاد العمودية في الحالة (ب) نحصل في الحالتين على ن من المثلثـات القائمة يكون ارتفاع الهرم ضلعاً مشتركاً فيها . فهي مثلثات متطـابقة أوتارها (وهي حافات في الحالة (أ) وابعاد عمودية في الحـالة (ب)) متساويـة الطول حسب التعريفات المبينة في المسألة . وقد ذكرنا ان ضلعاً آخر هو ارتفاع الهرم والزاوية القائمة مشتركان فيها . ففي المثلثات ن يكون الضلع الثالث في كل منها واحداً . وهذه الاضلاع مرسومة من نقطة واحدة هي اسفل الارتفاع وفي مستوٍ واحد هو مستوى القاعدة هـ فهي تكون « ن » انصاف اقطار في دائرة تحيط بقاعدة الهرم في الحالة (أ) او تحيط بها القاعـــدة في الحالة (ب) . (وفي الحالة (ب) يبقى علينا ان نبين ان الاضلاع ن تعامد اضلاع القاعدة . وهذا ينتج من مبدأ معروف في الهندسة المجسمة متعلق بالمساقط) .

وهنا يظهر ان الشكل المستوي المعروف ، المثلث المتساوي الساقـين ، له مجسمان يقابلانه في الهندسة الفراغية .

١١ – يلاحظ ان علاقة المعادلة الاولى بالرابعة كعلاقة الثانيـــة بالثالثة فالمعاملات الرقميـــة في الطرف الايمن واحدة ولكن الترتيب مختلف كما أن الاطراف اليسرى واحدة ولكن اشاراتها مختلفة . فاذا جمعنا الاولى الى الرابعة والثانية الى الثالثة ينتج :

٦ (س + ل) + ١٠ (ص + ك) = ٠ .

١٠ (س + ل) + ١٠ (ص + ك) = ٠ .

فاذا اعتبرنا هاتين معادلتين انيتين بمجهولين هما س + ل ، ص + ك نجد ان

س + ل = ٠ ، ص + ك = ٠ .

فاذا عوضنا ل = − س ، ك = − ص في المعادلتين الاوليين ينتج ان :

$$- ٤ س + ٤ ص = ١٦$$

$$٦ س - ٢ ص = - ١٦$$

ومن ذلك ينتج ان س = - ٢ ، ص = ٢ ، ل = ٢ ، ك = - ٢ .

١٢ - بين نقطة البدء ونقطة الالتقاء يكون الثلاثة قد قطعوا مسافة واحدة . (تذكر ان المسافة = السرعة × الزمن) فهنا نلحظ جزأين للشرط :

مسافة علي تساوي مسافة حسين :

$$ج ن_{١} - ج ن_{٢} + ج ن_{٣} = ج ن_{١} + ل ن_{٢} + ل ن_{٣}$$.

ومسافة حسين تساوي مسافة حسن :

$$ج ن_{١} + ل ن_{٢} + ل ن_{٣} = ل ن_{١} + ل ن_{٢} + ج ن_{٣}$$.

فمن المعادلة الثانية ينتج ان $(ج - ل) ن_{١} = (ج - ل) ن_{٣}$.

ونحن نفترض بالطبع ان ج اكبر من ل ، اذن $ن_{١} = ن_{٣}$.

اي ان حسن يمشي بقدر ما يمشي حسين .

ومن المعادلة الاولى نستنتج ان :

$$\frac{ن_{٣}}{ن_{٢}} = \frac{ج + ل}{ج - ل}$$

وهذا يساوي بالطبع $\frac{ن_{١}}{ن_{٢}}$

ومن ذلك نجد الاجوبة :

(أ) $\frac{\text{ج}(\text{ن}_{١} - \text{ن}_{٢} + \text{ن}_{٣})}{\text{ن}_{١} + \text{ن}_{٢} + \text{ن}_{٣}} = \frac{\text{ج}(\text{ج} + ٣\,\text{ل})}{٣\,\text{ج} + \text{ل}}$ ؛

(ب) $\frac{\text{ن}_{٢}}{\text{ن}_{١} + \text{ن}_{٢} + \text{ن}_{٣}} = \frac{\text{ج} - \text{ل}}{٣\,\text{ج} + \text{ل}}$ ؛

(جـ) فلأن $\text{صفر} < \text{ل} < \text{ج}$ تنتج الحالتان الخاصتان ل = ٠ ، ل = جـ .

فاذا كان ل = ٠ فان (أ) تعطي $\frac{\text{ج}}{٣}$ ، (ب) تعطي $\frac{١}{٣}$

واذا كان ل = جـ فان (أ) تعطي جـ ، (ب) تعطي صفراً .

وهاتان النتيجتان يمكن ان نراهما بدون عمليات حسابية .

١٣ – يمكن فصل الشرط الى اربعة اجزاء تعبر عنها المعادلات :

$$\text{أ} - \text{د} + \text{ب}\,\text{س} - ١ = ٨٥ ،$$

$$\text{أ} + \text{ب} = ٧٦ ،$$

$$\text{أ} + \text{د} + \text{ب}\,\text{س} = ٨٤ ،$$

$$٣\,\text{أ} = ١٢٦ .$$

ومن المعادلة الأخيرة ينتج ان أ = ٤٢ ، ومن الثانية ينتج ان ب = ٣٤ .

فاذا جمعنا الأولى والثالثة ينتج :

$$٢\,\text{أ} + \text{ب}\,(\text{س} - ١ + \text{س}) = ١٩٦ .$$

وقد عرفنا قيمتي أ ، ب فهذه اذن معادلة تربيعية وهي تعطينا :

$$\text{س} = ٢ ،\ \text{د} = -٢٦ ؛$$

$$\text{أو}\ \ \text{س} = \frac{١}{٢} ،\ \text{د} = ٢٥ .$$

فالمتواليتان اذن : ٦٨ ، ٤٢ ، ١٦ أو ١٧ ، ٤٢ ، ٦٧

١٧ ، ٣٤ ، ٦٨ او ٦٨ ، ٣٤ ، ١٧

١٤ – اذا كان أ ، – أ جذرين لزم ان تكون الجذور الأربعة هي :

– ٣ أ ، – أ ، أ ، ٣ أ .

فالطرف الأيمن في المعادلة هو (س^{٢} – أ^{٢}) (س^{٢} – ٩ أ^{٢}) .

وبفك الأقواس ومقارنة المعادلات ينتج ان :

١٠ أ^{٢} = ٣ م + ٢

٩ أ^{٤} = م^{٢}

وبحذف أ ينتج ان ١٩ م^{٢} – ١٠٨ م – ٣٦ = ٠

اذن م = ٦ او – $\frac{٦}{١٩}$

١٥ – افرض ان الضلعين والوتر هي أ ، ب ، ج على التوالي . فأجزاء الشرط الثلاثة هي : أ + ب + ج = ٦٠

أ^{٢} + ب^{٢} = ج^{٢}

أ ب = ١٢ ج

فاذا لاحظنا ان (أ + ب)^{٢} = أ^{٢} + ٢ أ ب + ب^{٢} ينتج ان :

(٦٠ – ج)^{٢} = ج^{٢} + ٢٤ ج

اذن : ج = ٢٥ ، أ = ١٥ او ٢٠

، ب = ٢٠ او ١٥ .

١٦ – اجزاء الشرط الثلاثة نعبر عنها بالمعادلات :

$$\text{جا هـ} = \frac{\text{س}}{\text{ل}} \text{ ،}$$

$$\text{جا و} = \frac{\text{س}}{\text{م}} \text{ ،}$$

$$\text{ج}^{٢} = \text{ل}^{٢} + \text{م}^{٢} - ٢\ \text{ل م جتان}$$

فاذا حذفنا ل ، م ينتج ان

$$\text{س}^{٢} = \frac{\text{ج}^{٢}\ \text{جا}^{٢}\ \text{هـ جا}^{٢}\ \text{و}}{\text{جا}^{٢}\ \text{هـ} + \text{جا}^{٢}\ \text{و} - ٢\ \text{جا هـ جا و جتان}}$$

١٧ - نستطيع ان نقدر ان :

$$\frac{١}{\underline{|٢}} + \frac{٢}{\underline{|٣}} + \cdots + \frac{\text{ن}}{\underline{|\text{ن}+١}} = ١ - \frac{١}{\underline{|\text{ن}+١}}$$

واتباعاً لنموذج المادة : الاستقراء والاستقراء الرياضي نتساءل : هل يبقى القانون صحيحاً اذا انتقلنا من ن الى ن + ١ ؟ ومن هذا نصنع العلاقة .

$$\frac{١}{\underline{|٢}} + \frac{٢}{\underline{|٣}} + \cdots + \frac{\text{ن}}{\underline{|\text{ن}+١}} + \frac{\text{ن}+١}{\underline{|\text{ن}+١}} = ١ - \frac{١}{\underline{|\text{ن}+٢}}$$

ولتحقيق صحة هذه العلاقة نطرحها من سابقتها فينتج ان:

$$\frac{\text{ن} + ١}{\underline{|\text{ن} + ٢}} = - \frac{١}{\underline{|\text{ن} + ٢}} + \frac{١}{\underline{|\text{ن}+١}}$$

وهذا يؤدي الى النتيجة $\frac{\text{ن} + ٢}{\underline{|\text{ن}+ ١}} = \frac{١}{\underline{|\text{ن}+ ١}}$ وهذه النتيجة صحيحة

فباستعمال مبدأ الاستقراء الرياضي نثبت صحة تقديرنا .

١٨ — يظهر ان الطرف الايسر في السطر ن هو $ن^{٣}$ وان الطرف الايمن هو مجموعة ن حدود . وان الحد الاخير في هذه المجموعة هو العـــدد الفردي الذي ترتيبه م، اي العدد ٢ م — ١ ، حيث :

$$م = ١ + ٢ + ٣ + \dots + ن = ن \frac{(ن + ١)}{٢}$$

انظر مادة : الاستقراء والاستقراء الرياضي ، ٤ .

فالحد الاخير في المجموعة اليمنى يجب ان يكون

$$٢ م - ١ = ن^{٢} + ن - ١ .$$

والآن نستطيع ان نحصل على الحد الأول بطريقتين :

فاذا عدنا ن —١ خطوات من الحد الأخير نجد ان:

$$(ن^{٢} + ن - ١) - ٢ (ن - ١) = ن^{٢} - ن + ١$$

واذا تقدّمنا خطوة بعد الحد الأخير في السطر السابق نجد :

$[(ن - ١)^{٢} + (ن - ١) - ١] + ٢$ وهذا يؤدي الى ذات النتيجة .

والآن نحقق صحة العلاقة :

$$(ن^{٢} - ن + ١) + (ن^{٢} - ن + ٣) + \dots + (ن^{٢} + ن - ١) = ن^{٣} ،$$

حيث يحتل الطرف الايمن مجموع ن من الحدود في المتوالية العددية التي فرقها ٢ . فاذا عرف القارىء القاعدة لايجاد هذا المجموع (متوسط الحدين الاول والاخير مضروباً في عدد الحدود) ينتج لديه العلاقة .

$$\frac{(ن^{٢} - ن + ١) + (ن^{٢} + ن - ١)}{٢} \times ن = ن^{٣}$$

واذن فقد ثبتت العلاقة .

(وهذه القاعدة يمكن توضيحها بشكل لا يختلف كثيراً عن شكل ٧) .

١٩ – اذا كان طول ضلع السداسي المنتظم ن فان محيطه ٦ ن فهذا المحيط اذن يحوي ٦ ن من الحدود التي طول كل منها ١ ويحوي ٦ ن من الاركان . اذن فبالانتقال من ن ـ ١ الى ن يزداد بمقدار ٦ ن من الرؤوس ولذا فان :

$$س = ١ + ٦ (١ + ٢ + ٣ + \ldots ، + ن) = ٣ ن^{٢} + ٣ ن + ١ .$$

انظر مادة : الاستقراء والاستقراء الرياضي ، ٤ . واذا رسمنا اقطاراً ثلاثة من مركز السداسي فانها تقسمه الى ٦ مثلثات متساوية الاضلاع (كبيرة) . وبالنظر في واحد من هذه نستنتج ان :

$$م = ٦ (١ + ٣ + ٥ + \ldots + ٢ ن - ١) = ٦ ن^{٢}$$

(راجع القاعدة لجمع المتوالية العددية في المسألة ١٨) .

والمثلثات م مجموع اضلاعها ٣ م . وفي هذا المجموع عد كل ضلع داخلي طوله وحدة مرتين في حين ان الاضلاع ٦ ن التي على المحيط عد كل منها مرة واحدة .

اذن $٢ ص = ٣ م + ٦ ن$ ،

$ص = ٩ ن^{٢} + ٣ ن$.

(والقارىء المتقدم يستنتج مباشرة من نظرية اويلر عن المجسمات الكثيرة الوجوه ان :

م + س = ص + ١ . حقق هذه النتيجة) .

٢٠ – هذه سلسلة منظمة من المسائل المتطابقة – احسب أ ن، ب ن، جـ ن ، د ن ، هـ ن . وكل من هذه الكميات تعني عدد الطرق لدفع ن قروش والفرق ينشأ عن القطع التي يدفع بها المبلغ :

أ ن بالقروش فقط

ب ن بالقروش والخمسة

جـ ن بالقروش والخمسة والعشرة

د ن بالقرش والخمسة والعشرة وربع الجنيه

هـ ن بالقرش والخمسة والعشرة وربع الجنيه ونصفه

وقد مر من قبل الرمز هـ ن (وسبب اختياره تبين الآن) ومر ايضاً الرمز أ ن اذن هـ ن تضم كل الطرق لدفع ن قروش بانواع القطع الخمسة . ولكن يمكن ان نميز بين احتمالين :

اولاً — اذا لم ندفع انصاف جنيهات فعدد الطرق هو د ن .

ثانياً — اذا دفعنا نصف جنيه (او اكثر) فبعد دفعه يبقى علينا ان ندفع ن — ٥٠ قرشاً .

وعدد الطرق لذلك هو هـ ن — ٥٠ .

ومن ذلك نستنتج ان هـ ن = د ن + هـ ن — ٥٠ ،

وبالمثل د ن = جـ ن + د ن — ٢٥ ،

جـ ن = ب ن + جـ ن — ١٠ ،

ب ن = أ ن + ب ن — ٥ .

ونستطيع ان ندرك ان هذه العلاقات تبقى صحيحة اذا اعتبرنا ان :

أ . ، = ب . ، = جـ . ، = د . ، = هـ . ، = ١

(والمعنى واضح) واعتبرنا ان كل واحدة من أ ن ، ب ن ، ... هـ ن تساوي صفراً اذا صار رقمها المميز سالباً (فمثلاً هـ ٢٥ = د ٢٥) كما يتبين بسهولة وهذا يتفق مع القانون الاول لأن هـ ٢٥ — ٥٠ = هـ — ٢٥ = ٠

والقوانين السابقة تمكننا من حساب هذه الكميات نزولاً من القيم العليا للرمز ن أو من الحروف الابجدية المتأخرة الى المتقدمة . فمثلاً نستطيع ان نجد جـ ٣٠ بالجمع اذا عرف جـ ٢٠ ، ب ٣٠ وفي الجدول التالي الصف الاول (وعنوانه أ ن) والعمود الاول (وعنوانه صفر) اعدادها ١ (ولماذا) . فاذا بدأنا من

هذه الاعداد نستطيع ان نحسب الأعداد ألتي تتلوهـــا بالجمع . وكل عدد في الجدول يساوي اما العدد الذي فوقه او مجموع عددين : العدد الذي فوقه وعدد آخر على بعد ما الى يمينه فمثلاً ج ٣٠ = ب ٣٠ + ج ٢٠ = ٧ + ٩ = ١٦ .

والجـــدول ينتهي في هـ ٥٠ = ٥٠ . فأنت تستطيع ان تدفع ٥٠ قرشاً بخمسين طريقة فاذا تابع القارىء العمليـــة فهو يستطيع ان يتوصل الى ان هـ ١٠٠ = ٢٩٢ فانت تستطيع ان تدفع الجنيه في ٢٩٢ طريقـــة شرط ان تستعمل القطع المذكورة في المسألة :

ن	٠	٥	١٠	١٥	٢٠	٢٥	٣٠	٣٥	٤٠	٤٥	٥٠
أ ن	١	١	١	١	١	١	١	١	١	١	١
ب ن	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١
ج ن	١	٢	٤	٦	٩	١٢	١٦	٢٠	٢٥	٣٠	٣٦
د ن	١	٢	٤	٦	٩	١٣	١٨	٢٤	٣١	٣٩	٤٩
هـ ن	١	٢	٤	٦	٩	١٣	١٨	٢٤	٣١	٣٩	٥٠

الفهـــرس

ف . ب . (١٤٠)

١٩٦٥

هذا الكتاب ...

هذا الكتاب الذي أتيح لنا أن نقدمه الى المكتبة العربية جولة رائعة في معركة فكرية ما تزال قائمة منذ عهد بعيد. وهي معركة تكاد تنجلي عن انقلاب واسع في عالم التربية، فمن حق القراء العرب عامة ومن يعنون بالتربية خاصة أن يطّلعوا عليها وان يكون لهم رأي في أحداثها.

... فموضوع الكتاب هو كيف نبحث عن حل لمسألتك وهذا بحث طرقه الاغريق وحام حوله غيرهم بعد عصر النهضة الأوروبيّة، ولكن المؤلف يشق في البحث طريقاً غير معبد معالمه ما تزال باهتة. فهو يجد في بحثه اصطلاحات وهي اصطلاحات حاولنا أن نجعل اللغة العربية تتسع لها. وفي مقدمة الاصطلاحات التي يجيئها المؤلف كلمة "الهوريستيكا" وهي دراسة طريقة البحث عن الحل - دراسة لم تبلغ بعد مبلغ التحديد الذي يجعلها علماً. والحل الذي يعنيه المؤلف هو أيّ حلّ ، حل أية مسئلة ، رياضيَّة كانت أو غير رياضيَّة.

«من مقدمة المترجم»

كتاب جدير بالقراءة

منشورات دار مكتبة الحياة - بيروت


Exclusive
For
www.ibtesama.com